Комплексный анализ. НМУ 2026. Лист 7.

Задача 1. Найдите голоморфную функцию с вещественной частью

a) $x^3 - 3xy^2 + 2x$;

b) $e^x \cos y$.

Задача 2. Найдите гармоническую функцию на единичном диске, принимающую на границе значение $\cos^2\theta$, где θ — угловая координата.

Задача 3. Пусть f — вещественнозначная функция на области. Докажите, что следующие условия эквивалентны

i) Симметрическая форма $\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} dz \otimes d\bar{z}\right)$ — неотрицательно определена.

ii) Среднее значение функции f по любой окружности в U не меньше чем значение в центре этой окружности.

Задача 4. Привести пример функции φ, гармонической в круге $U = \{x^2 + y^2 < x\}$, непрерывной в $\overline{U} \setminus \{0\}$, равной нулю всюду на $\partial U \setminus \{0\}$ и не равной нулю тождественно. (Пример показывает, что освобождение одной только точки границы от условий может привести к неединственности решения задачи Дирихле.

Задача 5. Если γ — гладкая кривая, а функция μ непрерывна на γ, то действительная функция

$$\varphi(z) = \int_\gamma \mu(\zeta) \ln|\zeta - z| \, d\zeta$$

называется логарифмическим потенциалом с плотностью μ. Доказать, что

a) φ гармонична вне γ;

b) если γ — окружность $\{|z| = r\}$ и $\mu \equiv 1$, то φ постоянна в круге $\{|z| < r\}$.

Задача 6. Пусть φ гармонична в верхней полуплоскости $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ и равна нулю всюду на оси x. Доказать, что $\varphi = \alpha y$, где α — неотрицательная константа.