

1. Докажите, что группа $U(2, 2) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{X^T} I_{2,2} X = I_{2,2}\}$, где $I_{2,2} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ является подгруппой Ли вещественной группы Ли $GL_4(\mathbb{C})$, найдите явно её алгебру Ли и вычислите размерность. Является ли эта группа комплексной подгруппой группы $GL_4(\mathbb{C})$?
2. Комплексная алгебра Ли задана в базисе x_1, x_2, x_3

$$[x_1, x_2] = 2x_2, [x_1, x_3] = -x_3 + x_2, [x_2, x_3] = 0.$$
 - а) Укажите какую-нибудь группу Ли с такой алгеброй Ли.
 - б) Выпишите левоинвариантные векторные поля на этой группе Ли, соответствующие x_1, x_2, x_3 в каких-нибудь координатах в окрестности единицы.
 - в) Найдите все комплексные группы Ли с данной алгеброй Ли.
3. Покажите, что централизатор элемента: $Z(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$ – подгруппа Ли.
4. а) Вычислите отображение векторных полей, соответствующее действию $GL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$.
 б) Вычислите отображение алгебр Ли, соответствующее отображению групп $SU(2) \rightarrow GL(3, \mathbb{R}), g \mapsto \text{Ad}_g$, т.е. элементу g сопоставляется оператор присоединённого действия на $\mathfrak{su}(2)$
5. а) Докажите, что касательная алгебра Ли группы Ли $PGL_2(\mathbb{C})$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
 б) Найдите размерности всех неприводимых голоморфных представлений группы Ли $PGL_2(\mathbb{C})$.
6. Пусть V_λ неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ со старшим весом λ . Разложите в прямую сумму неприводимых представление а) $S^2(V_5)$, б) $\Lambda^3 V_5$.
7. Пусть E, H, F стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Найдите все собственные значения элемента $\rho(E)^2 \rho(F)^2 \rho(H)^2 + \rho(E)^3 \rho(H)^3$ в представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ со старшим весом 6.
8. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R}), p + q \geq 3$ – полупроста. Докажите, что эта алгебра проста тогда и только тогда когда $p + q = 3, p + q > 4$ или $p = 2, q = 2$.
9. Простой группой Ли называют неабелеву связную группу Ли, не содержащую нетривиальных связных нормальных виртуальных подгрупп Ли. Докажите, что группа Ли $Sp_4(\mathbb{C})$ – простая группа Ли.
10. Докажите, что форма Киллинга на простой алгебре Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ пропорциональна $\text{tr}_V(ab)$.
11. Назовём решёткой дискретную подгруппу евклидова пространства $Q \subset E$ такую, что $\mathbb{R}Q = E$. Назовём решётку чётной, если $(\alpha, \alpha) \in 2\mathbb{Z}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если Q – чётная решётка, то множество $\Phi = \{\alpha \in E \mid (\alpha, \alpha) = 2\}$ образует систему корней.
12. Найдите число различных систем простых корней а) системы корней G_2 , б) системы корней A_4 , в) системы корней D_4 .