

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3.
Поверхности в n -мерном евклидовом
пространстве. 5.03.2025.

Задача 1. Докажите формулу

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2}(\partial_X \langle Y, Z \rangle + \partial_Y \langle Z, X \rangle - \partial_Z \langle X, Y \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle),$$

не используя координат векторных полей и символов Кристоффеля.

Задача 2. Найти в частном случае $k = 2$, $n = 3$ дериационные формулы Гаусса-Вейнгартена, если выбрать базис в касательных векторных полях $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ и базис \mathbf{m} в нормальных векторных полях.

Задача 3. Написать уравнение Гаусса $d\Gamma_j^i + \Gamma_l^i \wedge \Gamma_j^l = b_m^\nu g_{\mu\nu} g^{mi} \wedge b_j^\mu$ в терминах Γ_{ij}^l и b_{ij}^μ . Написать его в частном случае двумерной поверхности в \mathbb{E}^3 .

Задача 4. Вывести соотношение между db, b, Γ и K (уравнение Петерсона-Кодацци) по аналогии с уравнением Гаусса $d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_\mu \wedge b^\mu$, связывающим $d\Gamma, \Gamma$ и b . Доказать, что в случае гиперповерхности если взять единичное поле нормалей в качестве базиса в нормальных векторных полях, то уравнение Петерсона-Кодацци не содержит K . Записать уравнение Петерсона-Кодацци в терминах $\Gamma_{ij}^l, b_{ij}^\mu, K_{i,\nu}^\mu$ в частном случае двумерной поверхности в \mathbb{E}^3 .

Задача 5. Выписать формулу преобразования символов Кристоффеля $\tilde{\Gamma} = T^{-1} \cdot \Gamma \cdot T + T^{-1} \cdot dT$ в терминах Γ_{ij}^l и $\tilde{\Gamma}_{ij}^l$.

Задача 6. Придумать аналог нормали средней кривизны для k -поверхности в \mathbb{E}^n . Естественно, при $k = 2$, $n = 3$ результат должен совпадать с классическим определением (и это надо проверить). *Указание: используйте линейный функционал $\xi \mapsto \text{tr } W_\xi$ на пространстве N_{AM} .*

Задача 7. Рассмотрим кривую в \mathbb{E}^n . Легко видеть, что любое базисное касательное векторное поле e_1 можно рассматривать как вектор скорости для некоторой параметризации. Пусть t такой параметр. Доказать, что кривизна кривой может быть найдена по формуле

$$k = \sqrt{\left(\frac{b_{11}^1}{g_{11}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b_{11}^{n-1}}{g_{11}}\right)^2}.$$

Задача 8. В условиях предыдущей задачи доказать, что $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln g_{11}$.

Задача 9. Найти связность в касательном расслоении, вторую квадратичную форму и оператор Вейнгартена для прямого кругового цилиндра в \mathbb{E}^3 .

Задача 10*. Доказать первое структурное уравнение Картана

$$de^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma_{\beta}^\alpha,$$

где e^α — базис, дуальный к выбранному базису e_α пространства касательных векторных полей.