

Вычисление гомологий

Задача 5.1. Вычислите гомологии а) произведения сфер $S^n \times S^m$, $n, m \geq 2$;

б) сферы с g ручками; в) сферы с g плёнками Мёбиуса;

г) комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$;

д) “ $(n+1)$ -мерной бутылки Клейна” $S^1 \tilde{\times} S^n$;

е) трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$;

ж) связной суммы произведений сфер $X = (S^3 \times S^3) \# (S^2 \times S^2 \times S^2)$.

- ▷ *Связная сумма* n -мерных многообразий M_1 и M_2 определяется так: пусть M'_i — это M_i без маленького открытого диска; тогда $M_1 \# M_2$ определяется как склейка M'_1 и M'_2 по граничной $(n-1)$ -сфере. Вообще говоря, склеить можно двумя разными способами.

Задача 5.2. Докажите, что $H_*(X \times S^n) \cong H_*(X) \oplus H_{*-n}(X)$ для любого X .

Задача 5.3. Пусть X получается приклеиванием к $S^1 \vee S^1$ двух двумерных клеток по произвольным словам w_1 и w_2 (из букв a, b, a^{-1}, b^{-1}). а) Вычислите $H_*(X)$. (Степени слов даны.)

б) Пусть $w_1 = a^5 b^{-3}$, $w_2 = b^3 (ab)^{-2}$. Докажите, что X ациклично ($\tilde{H}_*(X) = 0$), но $\pi_1(X) \neq 1$.

- ▷ Подсказка: найдите конечную группу G и элементы $a, b \in G$ такие, что $a^5 = b^3 = (ab)^2 = 1$.
- ▷ Гомологии с коэффициентами в абелевой группе G определяются аналогично обычным гомологиям: $H_*(X; G) := H_*(C_\bullet(X; G))$, где $C_\bullet(X; G) := C_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$, то есть $C_n(X; G) = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} G$.

Задача 5.4. Вычислите $H_*(\mathbb{R}P^n; G)$, где а) $G = \mathbb{Z}/2$; б) $1/2 \in G$; в) $G = \mathbb{Z}$; г) G произвольная.

Задача 5.5 (трансфер для накрытий). Пусть $p: E \rightarrow B$ — n -листное накрытие, $n < \infty$.

а) Постройте цепное отображение $\tau: C_\bullet(B) \rightarrow C_\bullet(E)$ такое, что $p_\# \circ \tau = n \cdot \text{id}_{C_\bullet(B)}$.

б) Пусть абелева группа G такова, что $G = nG$. Докажите, что $H_*(E; G) \rightarrow H_*(B; G)$ сюръективно.

в) Пусть теперь накрытие *регулярное*, то есть $B = E/\Gamma$ для некоторой n -элементной группы $\Gamma \curvearrowright E$.

Докажите, что p_* раскладывается в композицию $H_*(E) \rightarrow H_*(E)_\Gamma \rightarrow H_*(B)$, где

$H_*(E)_\Gamma := H_*(E)/(g \cdot x - x : x \in H_*(E), g \in \Gamma)$ — *коинварианты* действия $\Gamma \curvearrowright H_*(E)$.

г) Пусть в G умножение на n биективно. Докажите, что $H_*(E; G)_\Gamma \rightarrow H_*(B; G)$ — изоморфизм.

Задача 5.6. Пусть X — конечное клеточное пространство. Докажите:

а) если $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ клеточные, то $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

б) если A — незамкнутое объединение клеток, то это уже не так.

в) если $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — n -листное накрытие, то $\chi(\tilde{X}) = n\chi(X)$.

г) $\chi(X_1 \times X_2) = \chi(X_1) \cdot \chi(X_2)$.

- ▷ Отображение CW-комплексов $f: X \rightarrow Y$ *клеточное*, если $f(\text{sk}_n(X)) \subseteq \text{sk}_n(Y)$ при всех n .

Задача 5.7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — клеточное отображение.

а) Постройте цепное отображение $f_\#^{CW}: C_\bullet^{CW}(X) \rightarrow C_\bullet^{CW}(Y)$.

б) Как его вычислить в терминах степеней (каких-то) отображений (сферы в себя)?

Задача 5.8. а) Заданы абелевы группы H_i , $i \geq 1$. Постройте CW-комплекс X такой, что $H_i \simeq H_i(X)$.

б) Заданы $f_i: H_i \rightarrow H'_i$, $i \geq 1$. Постройте $f: X \rightarrow Y$ такое, что $f_i = f_*: H_i \simeq H_i(X) \rightarrow H_i(Y) \simeq H'_i$.

Задача 5.9. а) Докажите, что симплициальные гомологии — частный случай клеточных.

б*) Пусть $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ — симплициальное отображение. Докажите, что индуцированные отображения

$f_*: H_*^\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow H_*^\Delta(\mathcal{L})$ (см. задачу 2.7) и $f_*: H_*(|\mathcal{K}|) \rightarrow H_*(|\mathcal{L}|)$ совпадают.

Задача 5.10*. Пусть X, Y клеточные. Докажите, что $C_\bullet^{CW}(X \times Y) \cong C_\bullet^{CW}(X) \otimes C_\bullet^{CW}(Y)$.