

Листок 4

Геометрия

Замощения

Чтобы сдать этот листок, необходимо решить хотя бы 7 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать, нужно решить все пункты. Схемы семнадцати фёдоровских групп можно найти в книге А. Б. Сосинского.

1. Найдите 8 замощений плоскости копиями нескольких правильных многоугольников при условии, что для любых двух вершин существует движение плоскости, которое переводит замощение в себя, а одну из этих вершин - в другую. Докажите, что других таких замощений нет (не считая трех замощений правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками соответственно).
2. (а) Докажите, что равными копиями любого выпуклого четырехугольника можно замостить плоскость.
(б) Докажите, что равными копиями любого невыпуклого четырехугольника можно замостить плоскость.
(в) Придумайте выпуклый пятиугольник, копиями которого можно замостить плоскость.
3. (а) Покажите, что равными копиями любого центрально симметричного шестиугольника можно замостить плоскость.
(б) Покажите, что существует выпуклый шестиугольник, копиями которого нельзя замостить плоскость.
(в) Покажите, что существует невыпуклый шестиугольник, копиями которого нельзя замостить плоскость.
(г) Покажите, что для любого $n \geq 7$ существует невыпуклый n -угольник равными копиями которого можно замостить плоскость.
4. * Докажите, что если $n \geq 7$, то не существует замощения плоскости равными выпуклыми n -угольниками.
5. Докажите, что дискретная группа движений прямой имеет один из следующих четырех видов: (1) тривиальная $\{e\}$; (2) содержит только два элемента: e и симметрию $S_a(x) = 2a - x$; (3) содержит только параллельные переносы на целочисленные кратные одного ненулевого вектора, т.е. $\{T_k \vec{b} : k \in \mathbb{Z}\}$; (4) состоит из переносов $T_k \vec{b}$ и симметрий $S_{a+k\vec{b}/2}$.
6. Докажите, что любая изометрия плоскости, не сохраняющая ориентацию, есть скользящая симметрия относительно некоторой прямой L с параллельным ей вектором сдвига (возможно, нулевым).
7. (а) Докажите, что композицию двух поворотов $r = (a, \varphi)$ и $s = (b, \psi)$ можно построить следующим образом. Соединим точки a и b , повернём луч $[a, b)$ вокруг a на угол $-\varphi/2$, повернём луч $[b, a)$ вокруг b на угол $\psi/2$ и обозначим через c точку пересечения двух полученных лучей; тогда c является центром композиции $r * s$, а её угол поворота равен $2(\pi - \varphi/2 - \psi/2)$. Покажите, что такое построение невозможно в частном случае, когда углы поворотов равны, но противоположно ориентированы, и тогда их композиция — параллельный перенос.
(б) Докажите, что композиция поворота и параллельного переноса — поворот на тот же угол, и найдите его центр.
(в) Докажите, что композиция двух отражений от прямых l_1 и l_2 — поворот вокруг точки пересечения этих прямых на угол, вдвое больший ориентированного угла от l_1 к l_2 .
8. (а) Пусть группа симметрий бордюра содержит отражение относительно оси, перпендикулярной направлению ℓ параллельных переносов. Опишите все отражения в этой группе, относительно осей, перпендикулярных ℓ .
(б) Пусть группа симметрий бордюра содержит отражение или скользящую симметрию относительно оси, параллельной направлению ℓ параллельных переносов. Опишите все скользящие симметрии в этой группе.
(в) Относительно каких еще осей в группе симметрий бордюра могут быть симметрии и скользящие симметрии?
(г) Пусть группа симметрий бордюра содержит центральную симметрию. Опишите все центральные симметрии в этой группе.

9. Дайте полное доказательство теоремы о классификации групп симметрий бордюров.
10. (a) Верно ли, что группа преобразований замощения, показанного на рис. 1 (б), является подгруппой группы преобразований для рис. 1 (в)?
- (b) Укажите точки, которые являются центрами поворотов из группы преобразований замощения, показанного на рис. 1 (в).
- (c) Переставьте вопросительные знаки в замощении в) на рис. 1 так, чтобы получилась геометрия, изоморфная случаю замощения а).
11. Какими платоновыми телами можно заполнить трёхмерное евклидово пространство (без перекрытий)?
12. Укажите, каким из семнадцати фёдоровских групп соответствуют картины Эшера на рис. 2.
13. (a) Какие из семнадцати фёдоровских групп содержат скользящую симметрию, но не содержат отражений?
- (b) Какие две из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот на угол $\pi/3$?
- (c) Какие три из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот на угол $\pi/2$?
- (d) Какие пять из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот лишь на угол π ?
14. * Докажите, что в фёдоровской группе не может быть оси поворота пятого порядка (т.е. на угол $2\pi/5$).

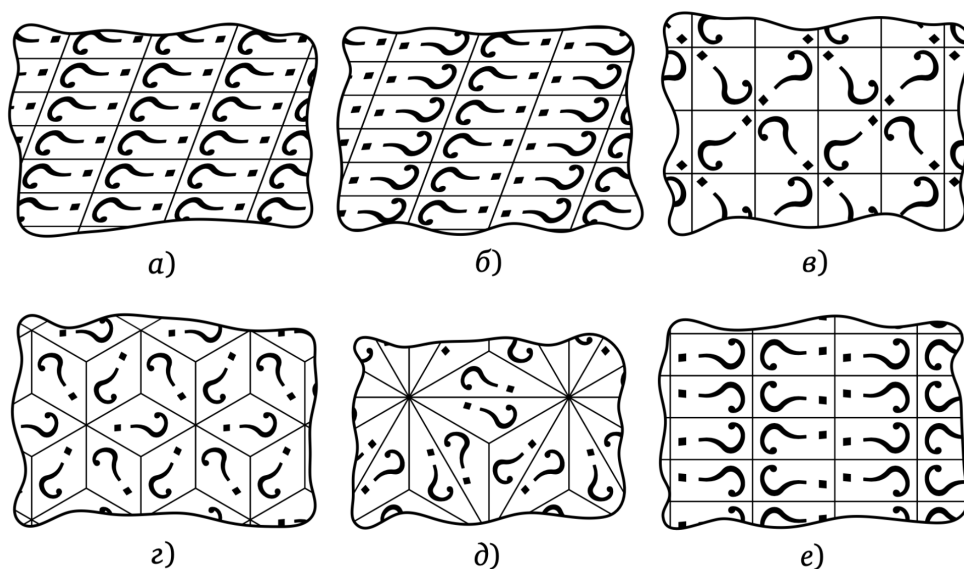


Рис. 1: Замощения а)–е).

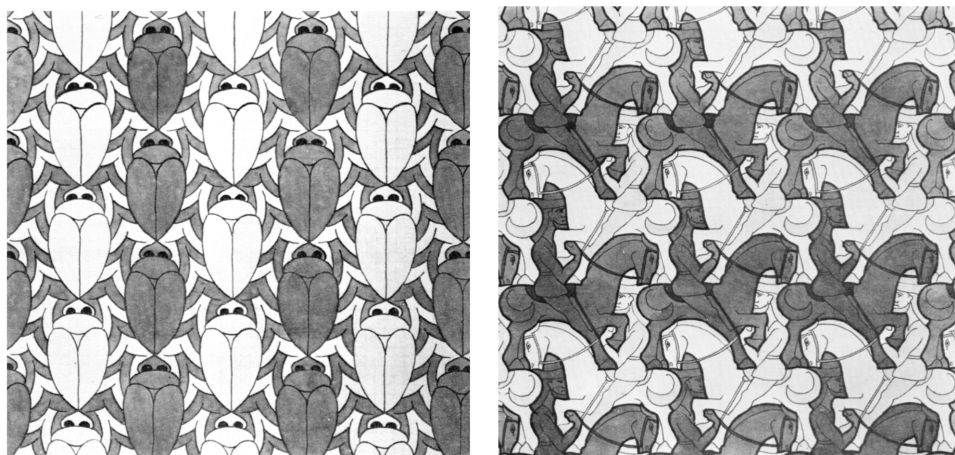


Рис. 2: Картины Эшера.