

Евклидовы пространства III

Задача 5.1. Пусть U, W — подпространства (конечномерного) евклидова или эрмитова пространства V . Докажите: а) $(U^\perp)^\perp = U$; б) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$; в) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Задача 5.2. а) Найдите угол между вектором $v = (4, -8, 0, 1)$ и плоскостью $\pi = \langle (-1, 1, 2, 3), (2, 0, 1, 1) \rangle$.

б) Найдите угол между вектором $v = (1, -5, -3, -5)$ и плоскостью π , заданной системой уравнений

$$\begin{cases} -4x + 3y + 2z + t = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

в) Найдите расстояние между плоскостью $\pi = (4, 1, -2, 5) + \langle (0, 1, -2, 4), (1, 1, -3, 3) \rangle$ и прямой $l = (2, 3, 2, 9) + \langle (0, -1, 2, -5) \rangle$.

г) Найдите расстояние между прямой $l = (-1, 3, 4, -1) + \langle (1, -2, -1, -1) \rangle$ и плоскостью π , заданной системой уравнений $\begin{cases} 2x + y - 2z + 2t = 4 \\ 5x + 2y - 7z - 6t = -7. \end{cases}$

Задача 5.3. Единичным кубом I^n в n -мерном аффинном евклидовом пространстве называется параллелепипед на векторах, образующих ортонормированный базис.

а) Найдите расстояние между двумерной гранью четырёхмерного куба I^4 и его диагональю, не пересекающей эту грань.

б) Докажите, что ортогональные проекции вершин куба I^n на любую его диагональ делят её на n равных частей.

в) Найдите угол между диагональю куба I^n и его k -мерной гранью.

Задача 5.4. Какие трёхмерные тела получаются в сечении четырёхмерного куба

$$\{x \in \mathbb{R}^4: -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3, 4\}$$

трёхмерной гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \varepsilon$ при значениях $\varepsilon = 0, 2, 3, 4, 5$? Сравните результаты с аналогичной трёхмерной задачей.

Задача 5.5. Даны три симметричные матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В каждом из случаев выясните, может ли матрица быть матрицей Грама

а) линейно независимой системы векторов;

б) системы векторов (не обязательно линейно независимой)?

Задача 5.6. Докажите обобщённое неравенство Адамара:

$$\det G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \leq \det G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) \cdot \det G(\mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k), \quad i = 1, \dots, k,$$

и выясните его геометрический смысл. Когда оно превращается в равенство?

Задача 5.7. а) Докажите, что расстояние между аффинными подпространствами $\mathfrak{B} = P + \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \rangle$ и $\mathfrak{C} = Q + \langle \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l \rangle$ в $\mathbb{A}^n$ можно вычислять по формуле

$$d(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \sqrt{\frac{\det G(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l, \overline{PQ})}{\det G(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l)}},$$

где $\det G$ — определитель матрицы Грама.

б) Пусть $\ell_1 = P_1 + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ и $\ell_2 = P_2 + \langle \mathbf{v}_2 \rangle$ — скрещивающиеся прямые в $\mathbb{A}^3$. Выведите из общей формулы, что

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overline{P_1 P_2})|}{|[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]|}.$$

Задача 5.8. Методом наименьших квадратов найдите псевдорешение следующих несовместных систем линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 1, \\ x + y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = 2, \\ 2x - y = 1, \\ x - 2y = -1, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x - z = 1, \\ y + z = -1, \\ x - y + z = 0, \\ x - z = -1. \end{cases}$$

Задача 5.9. Методом наименьших квадратов найдите интерполяцию (наилучшее среднеквадратичное приближение) функции f , заданной значениями $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$:

а) линейным многочленом $b_1x + b_0$; б) квадратичным многочленом $b_2x^2 + b_1x + b_0$; в) кубическим многочленом $b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

В каждом из этих случаев найдите квадратичное отклонение.

Задача 5.10. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, и $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ — симметричная билинейная форма (т. е. функция b линейна по каждому аргументу, и $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$).

а) Найдите размерность пространства всех симметричных билинейных форм на V .

б) Пусть $b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Докажите, что $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

в) Докажите, что существует базис $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и числа $k, \ell \geq 0$ такие, что

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ky_k - x_{k+1}y_{k+1} - \dots - x_{k+\ell}y_{k+\ell}.$$

УКАЗАНИЕ. Сначала рассмотрите случай $n = 2$.

г) Докажите: если подпространство $W \subset V$ таково, что форма $b|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ является скалярным произведением, то $W \cap \langle \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = 0$ и $\dim W \leq k$. Выведите, что числа k и ℓ определены однозначно. (Их сумма называется *рангом* формы b , а разность — её *сигнатурой*.)

д) Пусть $k + \ell = n$, $W \subset V$ — подпространство, $\dim W \geq n/2$, и $b(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ для всех $\mathbf{w} \in W$. Докажите, что $W \cap \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \rangle = W \cap \langle \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = 0$ и $k = \ell$.