Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №3

Пусть $f:\, R^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$.

1) если f дифференцируема в точке x, то все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в этой точке существуют;

2) если все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в окрестности точки x существуют и непрерывны, то f дифференцируема в этой точке;

3) матрица оператора производной f'_x в стандартных базисах в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ равна $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$;

4) формула дифференцирования "сложной функции" (суперпозиции):
пусть $\phi(x) = f(y)$, где $y = g(x)$, $g:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f:\, \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Пусть g дифференцируемо в x, а f – в $y = g(x)$. Тогда ϕ дифференцируемо в x и $\phi'_x = f'_y\big|_{y=g(x)} \cdot g'_x$.

Пусть $f(x)$ – функция ($x \in \mathbb{R}^n$). Её поверхностью уровня называется гиперповерхность $f(x) = const$. Касательной плоскостью к поверхности $f(x) = const$ называется гиперплоскость в пространстве переменных $h \in \mathbb{R}^n$, заданная уравнением $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i = 0$.

5) доказать, что касательная плоскость в некоторой точке порождена всеми векторами, касательными к кривым на поверхности, проходящим через эту точку;

6) доказать, что градиент f нормален к поверхности уровня, проходящей через ту же точку (то есть, по определению, к её касательной плоскости в этой точке);

7) доказать, что в условной критической точке функции f при условиях $F_i(x) = 0$ ($i = 1, \ldots, m$) градиент f равен линейной комбинации градиентов функций F_i, $i = 1, \ldots, m$;

8) доказать, что в некритической точке функция локально монотонна в направлении градиента, то есть монотонна на прямой $x + t\nabla_x$ при малых t, где ∇_x – градиент в x.

План лекции №3. Дифференцируемые отображения.

Производная и дифференциал отображения. Матрица Якоби. Теорема о неявном отображении. Теорема об обратном отображении. Критические точки. Условные экстремумы. Функция Лагранжа.