

Сингулярные гомологии. Цепные гомотопии

Задача 2.1. Для симплициального комплекса $\mathcal{K}$ постройте цепное отображение $C_*^\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow C_*(|\mathcal{K}|)$.

▷ Через несколько лекций мы докажем, что оно индуцирует изоморфизм $H_*^\Delta(\mathcal{K}) \cong H_*(|\mathcal{K}|)$.

Задача 2.2. Пусть вложение подпространства $i : A \hookrightarrow X$ допускает ретракцию (кстати, что это?). Докажите, что $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ а) инъективно; б) вложение прямым слагаемым.

Задача 2.3. а) Постройте гомоморфизм групп $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. б) Пусть X линейно связно. Докажите, что h сюръективно, и $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \subseteq \text{Ker}(h)$.

▷ Через несколько лекций мы докажем, что $[\pi_1, \pi_1] = \text{Ker}(h)$, т.е. $\pi_1(X)_{ab} \cong H_1(X)$ (“теорема Пуанкаре”).

Задача 2.4. Пусть $x \in H_n(X)$ — произвольный элемент. Постройте конечный CW-комплекс Y , элемент $y \in H_n(Y)$ и отображение $f : Y \rightarrow X$ такие, что $x = f_*(y)$.

Задача 2.5. Пусть $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ — цепочка вложенных топологических пространств, причём всякий компакт $K \subset X$ содержится в некотором X_n . а) Докажите, что естественное отображение $\text{colim}_n H_*(X_n) \rightarrow H_*(X)$ — изоморфизм. б) То же для $\pi_1(X, x_0)$.

Задача 2.6. а) Построив цепную гомотопию, докажите, что симплициальные гомологии симплекса тривиальны. б) Вычислите симплициальные гомологии d -мерного остова n -мерного симплекса.

Задача 2.7*. Симплициальное отображение $\mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ — это такое отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$, что $f(I) \in \mathcal{K}_2$ для всех $I \in \mathcal{K}_1$. Постройте цепное отображение $f_\# : \tilde{C}_*^\Delta(\mathcal{K}_1) \rightarrow \tilde{C}_*^\Delta(\mathcal{K}_2)$ и проверьте, что $(f \circ g)_\# = f_\# \circ g_\#$. Рассмотрите три случая: а) f монотонно; б) f биективно; в) f любое.

Задача 2.8. а) Пусть $C_\bullet$ — цепной комплекс над полем. Постройте цепную гомотопическую эквивалентность между $C_\bullet$ и $(H_*(C_\bullet), 0)$. б) Верно ли это для комплексов свободных абелевых групп?

Задача 2.9. Докажите: а) цепная гомотопность — отношение эквивалентности (на множестве цепных отображений $C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$); б) если $f \sim g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ и $f' \sim g' : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$, то $f' \circ f \sim g' \circ g$.

Задача 2.10. Пусть диаграмма ниже коммутативна и имеет точные строки. Докажите:

- а) Если l сюръективно, а m, p инъективны, то n инъективно.
 б) Если m, p сюръективны, а q инъективно, то n сюръективно.
 в) (**5-лемма**) Если l, m, p, q — изоморфизмы, то n — изоморфизм.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{j} & E \\
 \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow n & & \downarrow p & & \downarrow q \\
 A' & \xrightarrow{r} & B' & \xrightarrow{s} & C' & \xrightarrow{t} & D' & \xrightarrow{u} & E'
 \end{array}$$