ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 6: ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ-2

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите: вещественное расслоение ξ ориентируемо $\Leftrightarrow w_1(\xi) = 0$.

2. а) Докажите, что пространство Тома $Th(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}^k)$ гомеоморфно $\Sigma^k Th(\xi)$, где Σ^k — k-кратная приведённая надстройка, а $\underline{\mathbb{R}}^k$ — тривиальное k-мерное расслоение.
б) Докажите, что что пространство Тома $Th(\xi)$ гомеоморфно $\mathbb{R}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}})/\mathbb{R}P(\xi)$. Обнаружьте в этих терминах изоморфизм Тома.
в) Докажите, что $Th(\gamma_n^1) \cong \mathbb{R}P^{n+1}$, где γ_n^1 — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$.
г) Сформулируйте и докажите комплексные аналоги этих утверждений.

3. а) Докажите, что $w_n(\xi) = e(\xi) \bmod 2$ для ориентированного n-мерного расслоения ξ, т.е. что класс Эйлера переходит в n-ый класс Штифеля–Уитни при гомоморфизме $H^n(B;\mathbb{Z}) \to H^n(B;\mathbb{Z}_2)$.
б) Докажите, что для n-мерного комплексного расслоения η верно $e(\eta_{\mathbb{R}}) = c_n(\eta)$.
в) Для комплексного расслоения η выразите классы $w_i(\eta_{\mathbb{R}})$ через классы $c_j(\eta)$.
г) Для вещественного расслоения ξ выразите классы $c_i(\xi \otimes \mathbb{C}) \bmod 2$ через классы $w_j(\xi)$.

4. Докажите, что не существует погружения $\mathbb{C}P^9 \looparrowright S^{23}$.

5. Докажите, что для тавтологического расслоения γ^n над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ прямая сумма $\gamma^n \oplus \gamma^n$ ориентируема и её класс Эйлера не равен нулю.

6. Для целых чисел $0 \le k \le l$ определим *многообразия Милнора*

$$H_{kl} = \{([z_0 : \ldots : z_k], [w_0 : \ldots : w_l]) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \mid z_0 w_0 + \cdots + z_k w_k = 0\}$$

а) Проверьте, что это действительно гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l$.
б) Вычислите его кольцо когомологий.

7. а) Пусть $s\colon M \to E$ — (гладкое) сечение (гладкого) векторного расслоения ξ над многообразием M, а $\Gamma_s = \{e \in E \mid e = s(p(e))\} \subset E$ — его график в E. Чему изоморфно нормальное расслоение к Γ_s в E?
б) Оказалось, что Γ_s трансверсально пересекается с нулевым сечением $M \subset E$, и следовательно, пересечение $Z_s = \Gamma_s \cap M = s^{-1}(0)$ является гладким подмногообразием в M. Докажите, что нормальное расслоение к $Z_s \hookrightarrow M$ изоморфно ограничению ξ на Z_s.

8. а) Пусть $i\colon N \hookrightarrow M$ — вложение замкнутых ориентированных многообразий, ν — соответствующее нормальное расслоение. Пусть нашлось ориентированное расслоение ξ на M такое, что $\xi|_N$ и ν изоморфны. Докажите, что класс $i_*[N] \in H_*(M)$ и класс Эйлера $e(\xi) \in H^*(M)$ двойственны по Пуанкаре.
б) Пусть ξ — ориентируемое n-мерное расслоение над ориентируемым замкнутым m-мерным многообразием M. Соответствующее расслоение дисков $D(\xi)$ — компактное многообразие с краем $S(\xi)$, расслоением единичных сфер. Найдите класс гомологий, двойственный по Пуанкаре–Лефшецу к классу Тома $\theta(\xi) \in H^n(D(\xi), S(\xi); \mathbb{Z})$.
в) Пусть $f \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ — однородный многочлен степени k. Предположим, что его множество нулей $Z_f = \{[z_0 : \ldots : z_n] \mid f(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$ — гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}P^n$. Найдите класс когомологий, двойственный по Пуанкаре к $i_*[Z_f] \in H_*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$.