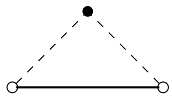
ТОПОЛОГИЯ–1
ЛИСТОЧЕК 5: КОНСТРУКЦИИ ПРОСТРАНСТВ-2

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Докажите, что конус $C(S^n)$ над n-мерной сферой гомеоморфен $n+1$-мерному замкнутому шару D^{n+1}. Чему гомеоморфна надстройка ΣS^n? А конус и надстройка над n-мерным шаром?

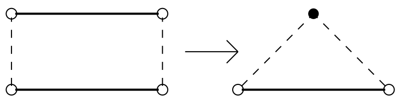
2. Рассмотрим треугольник на плоскости

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, 0 \leqslant y < 1 - |x|\} \cup \{(0, 1)\}$$



Рассмотрим непрерывное отображение

$$(-1; 1) \times [0; 1] \to T, \quad (x, y) \mapsto (x(1 - |y|), y)$$



Это отображение переводит верхний интервал $(-1; 1) \times \{1\}$ в верхнюю вершину $(0, 1)$ треугольника T. Поэтому оно определяет непрерывное отображение из конуса $C((0; 1))$ над интервалом $(-1; 1)$ в треугольник T. Докажите, что эта непрерывная биекция не является гомеоморфизмом. Гомеоморфны ли вообще T и $C((0; 1))$?

3. Рассмотрим подпространство $X \bar{*} Y \subset C(X) \times C(Y)$, состоящее из таких пар $([x, t], [y, s])$, что $t = 0$ или $s = 0$ (то есть, $X \bar{*} Y = C(X) \times Y \cup X \times C(Y) \subset C(X) \times C(Y)$).

а) Проверьте, что $X \bar{*} Y \cong \{([x, t], [y, s]) \mid t + s = 1\} \subset C(X) \times C(Y)$. Докажите, что $X \bar{*} Y \cong Y \bar{*} X$ и $(X \bar{*} Y) \bar{*} Z \cong X \bar{*} (Y \bar{*} Z)$.

б) Проверьте, что имеют место естественные вложения $X \hookrightarrow X \bar{*} Y$, $x \mapsto ([x, 0], [y, 1])$ и $X \times Y \hookrightarrow X \bar{*} Y$, $(x, y) \mapsto ([x, 0], [y, 0])$. Докажите, что $X \bar{*} Y$ компактно $\Leftrightarrow$ X и Y компактны.

в) Докажите, что $X \bar{*} Y$ хаусдорфово $\Leftrightarrow$ X и Y хаусдорфовы. Верно ли это для локальной компактности?

4. Напомним, что *джойном* двух пространств X и Y называется факторпространство $X * Y = X \times Y \times I / ((x_1, y, 0) \sim (x_2, y, 0), (x, y_1, 1) \sim (x, y_2, 1))$.

а) Проверьте, что $X * Y \cong Y * X$ и имеют место естественные вложения $X \hookrightarrow X * Y$, $x \mapsto [x, y, 1]$ и $X \times Y \hookrightarrow X * Y$, $(x, y) \mapsto [x, \frac{1}{2}, y]$. Докажите, что $X * Y$ компактно тогда и только тогда, когда пространства X и Y компактны.

б) Докажите то же для свойства хаусдорфовости. Верно ли это для локальной компактности?

5. а) Докажите, что существует естественная непрерывная биекция $X * Y \to X \bar{*} Y$. Покажите, что для компактных хаусдорфовых пространств X и Y она будет гомеоморфизмом. В частности, в этом случае операция джойна коммутативна и ассоциативна.

б) Докажите, что на самом деле эта биекция будет гомеоморфизмом для локально компактных хаусдорфовых пространств X и Y.

6. Докажите, что для любых пространств X и Y пространства $X \mathbin{\overline{*}} Y$ и $X * Y$ линейно связны.

7. Докажите, что для любого пространства X имеют место гомеоморфизмы $\mathrm{pt} * X \cong C(X) \cong \mathrm{pt} \mathbin{\overline{*}} X$, где pt — одноточечное пространство.

Проверьте, что для любого пространства X имеют место гомеоморфизмы

$$\Sigma(X) \cong (C(X) \sqcup C(X))/([x,0]_1 \sim [x,0]_2)$$

(склейка двух конусов по основаниям) и

$$S^0 * X \cong \Sigma(X) \cong S^0 \mathbin{\overline{*}} X,$$

где S^0 — нульмерная сфера, являющаяся границей одномерного диска (отрезка) и представляющая собой двухточечное множество с дискретной топологией.

В частности, конус и надстройка всегда линейно связны, а компактны или хаусдорфовы $\Leftrightarrow$ это свойство выполнено для X.

8. Докажите, что $S^n * S^m \cong S^{n+m+1}$. В частности, $\Sigma(S^n) \cong S^{n+1}$.

9. Напомним, что для семейства пространств X_α с выбранными в них точками $x_\alpha^0 \in X_\alpha$ их *букетом* называется факторпространство $\bigvee X_\alpha = (\bigsqcup X_\alpha)/(x_\alpha^0 \sim x_\beta^0)$.

Для каждого индекса β мы имеем естественное вложение $X_\beta \hookrightarrow \prod_\alpha X_\alpha$, переводящее точку $x \in X_\beta$ в точку $(x_\alpha) \in \prod_\alpha X_\alpha$ с координатами $x_\beta = x$ и $x_\alpha = x_\alpha^0$ для $\alpha \neq \beta$ (см. упражнение 2 листочка 3). Таким образом, они все вместе определяют непрерывное отображение $\bigsqcup X_\alpha \to \prod X_\alpha$.

Проверьте, что это отображение корректно определяет отображение из букета $\bigvee X_\alpha \to \prod X_\alpha$. Докажите, что в случае двух пространств это естественное отображение $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ является топологическим вложением (гомеоморфизмом на образ). То есть, мы можем считать, что $X \vee Y \subset X \times Y$. Верно ли это для бесконечного числа пространств?

10. Докажите, что букет $\bigvee X_\alpha$ хаусдорфов тогда и только тогда, когда все пространства X_α хаусдорфовы. Аналогично для связности и линейной связности. Докажите, что букет хаусдорфов и компактен $\Leftrightarrow$ в нём конечное число слагаемых (состоящих более, чем из одной точки) и все они компактны и хаусдорфовы. Может ли бесконечный букет быть компактным? Может ли в компактном букете быть некомпактное слагаемое? Что насчёт локальной компактности?

11. Напомним, что *смэш-произведением* пространств X и Y с выбранными точками $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ называется факторпространство $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ (оно обычно снабжается выбранной точкой $*$, соответствующей стянутому букету). Докажите, что $S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$ (вне зависимости от выборов точек в сферах).

Приведённой надстройкой $\Sigma_\bullet X$ пространства X с выбранной точкой x_0 называется $S^1 \wedge X$ (она не зависит от выбора точки на окружности). В частности, $\Sigma_\bullet S^n \cong S^{n+1}$. Проверьте, что $\Sigma_\bullet X \cong \Sigma(X)/\{x\} \times I$ (т.е. приведённая надстройка получается из обычной надстройки стягиванием в точку отрезка над выбранной точкой $x \in X$).

12. Докажите, что смэш-произведение коммутативно. Докажите, что оно ассоциативно (то есть, $(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$), если два из трёх пространств X, Y, Z хаусдорфовы и локально компактны.

В частности, если одно из пространств X, Y хаусдорфово и локально компактно, то $\Sigma_\bullet(X \wedge Y) \cong (\Sigma_\bullet X) \wedge Y \cong X \wedge (\Sigma_\bullet Y)$. Следовательно, для любого пространства X выполнено $\Sigma^k_\bullet X := \underbrace{\Sigma_\bullet \dots \Sigma_\bullet}_{k \text{ раз}} X \cong S^k \wedge X$.

Покажите также, что $\Omega^k X := \underbrace{\Omega \dots \Omega}_{k \text{ раз}} X \cong C_\bullet(S^k, X)$.

13. Приведите пример топологических пространств X, Y и Z, таких что $X \wedge (Y \wedge Z) \ncong (X \wedge Y) \wedge Z$.

14. а) Докажите, что для пространств с отмеченными точками X_α и Y, имеет место равенство множеств $C_\bullet(\bigvee X_\alpha, Y) = \prod C_\bullet(X_\alpha, Y)$.

б) Докажите, что для для пространств с отмеченными точками X, Y, Z имеет место гомеоморфизм $X \wedge (Y \vee Z) \cong (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

в) Докажите, что для для пространств с отмеченными точками X и Y_α имеет место гомеоморфизм $X \wedge (\bigvee Y_\alpha) \cong \bigvee (X \wedge Y_\alpha)$, если пространство X локально компактно.

15. Докажите, что подмножество $C \subset X$ клеточного пространства X компактно $\Leftrightarrow$ оно замкнуто и пересекает лишь конечное число клеток. Важно ли здесь каких клеток — открытых или замкнутых?

В частности, клеточное пространство компактно $\Leftrightarrow$ оно конечно;

клеточное пространство локально компактно $\Leftrightarrow$ оно локально конечно, т.е. каждая точка обладает окрестностью, пересекающей лишь конечное число клеток.

16. а) Докажите, что пространство X является клеточным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) X — хаусдорфово;

2) X представляется в виде дизъюнктного объединения множеств e^n_α (открытых клеток);

3) для каждой открытой клетки e^n_α существует такое непрерывное отображение $\chi_\alpha \colon D^n \to X$, что ограничение χ_α на внутренность $\mathring{D}^n$ является гомеоморфизмом $\mathring{D}^n \cong e^n_\alpha$;

(C) замыкание каждой n-мерной открытой клетки e^n_α содержится в объединении e^n_α и конечного числа клеток меньшей размерности, то есть, $\overline{e^n_\alpha} - e^n_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^k e^{n_i}_{\alpha_i}$, причём $n_i < n$;

(W) топология X порождена вложениями $\overline{e^n_\alpha} \hookrightarrow X$, то есть, подмножество $A \subset X$ открыто (или замкнуто) в $X \Leftrightarrow$ все его пересечения $X \cap \overline{e^n_\alpha}$ открыты (или замкнуты) в $\overline{e^n_\alpha}$.

б) Можно ли в аксиоме (W) вместо замкнутых клеток рассматривать открытые клетки? Приведите пример пространства, удовлетворяющего всем аксиомам выше, кроме (C).

Покажите, что подпространство $A \subset X$ является клеточным относительно некоторого подсемейства приклеивающих отображений для $X \Leftrightarrow$ оно замкнуто и состоит из клеток.

Проверьте, что если топологическое пространство разбито на клетки, удовлетворяющие всем аксиомам выше, кроме аксиомы (W), то увеличив топологию до топологии, определяемой аксиомой (W), мы получим клеточное пространство.

17. Проверьте, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ можно получить из единичного шара $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ факторизацией по отношению эквивалентности, которое склеивает точки x, y на граничной сфере S^{2n-1}, если $x = \lambda y$ для некоторого комплексного числа λ. Выведите, что $\mathbb{C}P^n$ получается из $\mathbb{C}P^{n-1}$ приклеиванием одной $2n$-мерной клетки.

18. Докажите, что связное локально компактное клеточное пространство не более чем счётно.

19. Докажите, что любое открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ обладает структурой клеточного пространства.

20. Докажите, что для любой точки x клеточного пространства X существует такая (новая) клеточная структура на X, что x будет её вершиной.

21. Рассмотрим для клеточных пространств X и Y две топологии на произведении $X \times Y$: обычную топологию произведения τ_Π и топологию τ_{CW}, порождённую произведениями замкнутых клеток $\overline{e^n_\alpha} \times \overline{\tilde{e}^n_\alpha}$, где $\overline{e^n_\alpha}$ — клетки в X и $\overline{e^n_\alpha}$ — клетки в Y. Докажите, что если X и Y не более чем счётны, то топологии τ_Π и τ_{CW} на $X \times Y$ совпадают.

22. Докажите, что для клеточного пространства X, его клеточного подпространства $A \subset X$ и клеточного отображения $f\colon A \to Z$, пространство $X \cup_f Y = X \sqcup Y/(a \sim f(a))$ является клеточным.

23. Докажите, что для клеточных пространств X и Y на их джойне $X * Y$ также существует разбиение на клетки, удовлетворяющее всем свойствам, кроме, быть может, аксиомы (W), и для которого $X, Y \subset X * Y$ — клеточные подпространства. То есть, в этом случае можно определить клеточный джойн $X *_{CW} Y$, как $X * Y$ с топологией, определяемой этим клеточным разбиением.

24. Хаусдорфово топологическое пространство называется *паракомпактным*, если для любого его открытого покрытия $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ существует такое семейство непрерывных функций $\varphi_\beta\colon X \to [0;1]$ (*разбиение единицы, подчинённое покрытию* U_α), что

1) длю любой функции φ_β существует такой α, что $\operatorname{supp}\varphi_\beta := \overline{\{x \in X \mid \varphi_\beta(x) \neq 0\}}$ лежит в U_α;

2) семейство φ_β *локально конечно*, то есть, для любой точки $x \in X$ существует такая её окрестность $U \ni x$, что на ней лишь конечное число функций φ_β отлично от нуля;

3) $\sum_\beta \varphi_\beta = 1$ (сумма в каждой точке конечна в силу предыдущего условия).

Докажите, что любое клеточное пространство паракомпактно.

25. Докажите, что клеточное пространство локально конечно $\Leftrightarrow$ оно удовлетворяет 1 аксиоме счётности $\Leftrightarrow$ оно метризуемо.

26. Докажите, что клеточное пространство не более чем счётно $\Leftrightarrow$ оно не содержит несчётного дискретного подмножества. Приведите пример клеточного пространства, которое сепарабельно, но не удовлетворяет 1 аксиоме счётности.

27. Докажите, что клеточное пространство можно вложить в $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ оно конечномерно, локально конечно и не более чем счётно.