

Листок 1
ГЕОМЕТРИЯ
Метрика, группы симметрий фигур

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 5 задач. В задаче 4 каждый пункт считается за отдельную задачу, при этом засчитаны могут быть максимум два пункта, если не сданы пункт e и f, и один, если сдан хотя бы один из пунктов e, f.

1. а) Докажите, что формула

$$d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, задаёт метрику в $\mathbb{R}^n$. Нарисуйте примеры открытых и замкнутых шаров радиуса ε с центром в $(0, 0)$ на $\mathbb{R}^2$ с этой метрикой.

- б) Докажите, что формула

$$d(x, y) = \sum_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, задаёт метрику в $\mathbb{R}^n$. Нарисуйте примеры открытых и замкнутых шаров радиуса ε с центром в $(0, 0)$ на $\mathbb{R}^2$ с этой метрикой.

- с) Пусть M — некоторое множество. Зададим функцию расстояния $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: для любых $x \neq y$ положим $d(x, y) = 1$ и $d(x, x) = 0$. Покажите, что (M, d) является метрическим пространством. Опишите открытые шары радиуса ε с центром в некоторой точке этого пространства.

2. Предъявите фигуру, группа симметрий которой изоморфна а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_3$; в) $\mathbb{Z}_4$.
3. Существует ли фигура на плоскости, группа симметрий которой изоморфна а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?
4. Перечислите все элементы (с указанием их порядка) группы симметрий следующих фигур:
- а) правильная четырехугольная пирамида;
 - б) правильный тетраэдр;
 - с) куб;
 - д) додекаэдр;
 - е) икосаэдр;
 - ф) правильный n -угольник; отдельно рассмотрите случаи четного и нечетного n .

Коммутативны ли эти группы? Перечислите все подгруппы группы симметрий данной фигуры. Из скольких элементов состоит группа движений (т.е. собственных изометрий) данной фигуры?

5. При каких n и m геометрию правильного n -угольника можно вложить в геометрию правильного m -угольника?
6. Пусть G — группа симметрий правильного тетраэдра. Найдите все ее подгруппы порядка 2 и опишите их действие геометрически.
7. Найдите минимальную систему образующих группы симметрий (т.е. минимальное количество симметрий, композициями которых являются все остальные симметрии):
- а) правильного тетраэдра;
 - б) куба.
8. Опишите фундаментальные области группы симметрий:
- а) куба;
 - б) икосаэдра;
 - с) правильного тетраэдра.

9. Покажите, что композиция двух отражений сферы относительно плоскостей, проходящих через ее центр, является поворотом. Найдите ось этого поворота и, если дан угол между плоскостями, угол поворота.