Семинар 4 (13 марта). Теоремы Ли. Спинорная группа.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon E \xrightarrow{F} B$ *– локально тривиальное расслоение со слоем* F, *и пусть* E, B, F *связны. Тогда существует точная последовательность гомотопических групп*

$$\cdots \to \pi_i(F) \xrightarrow{\iota_*} \pi_i(E) \xrightarrow{f_*} \pi_i(B) \xrightarrow{\delta_i} \pi_{i-1}(F) \to \cdots$$

Задача 1. (а) Покажите, что группа $GL_n(\mathbb{R})$ гомотопически эквивалентна группе $O_n(\mathbb{R})$. *Указание: Воспользуйтесь полярным разложением.*

(б) Вычислите фундаментальную группу и центр $SO_n(\mathbb{R})$. *Указание: Воспользуйтесь длинной точной последовательностью гомотопических групп для расслоения* $SO_n \xrightarrow{SO_{n-1}} S^{n-1}$.

Для $n \geqslant 3$ универсальная накрывающая группы $SO_n(\mathbb{R})$ называется спинорной группой и обозначается $Spin_n$. Например, $Spin_3 = SU_2$.

Задача 2. Цель задачи – посчитать центр $Spin_n$.

Элементы спинорной группы $Spin_n$ являются гомотопическими классами путей на SO_n с началом в единице. Обозначим за $[\gamma] \in Spin_n$ гомотопический класс петли $\gamma(t) := \begin{pmatrix} cos(2\pi t) & sin(2\pi t) & \cdots & 0 & 0 \\ -sin(2\pi t) & cos(2\pi t) & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ на SO_n, за $[\alpha]$ гомотопический класс пути на SO_{2n} из Id в $-Id$, заданный формулой: $\alpha(t) := \begin{pmatrix} cos(\pi t) & sin(\pi t) & \cdots & 0 & 0 \\ -sin(\pi t) & cos(\pi t) & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & cos(\pi t) & sin(\pi t) \\ 0 & 0 & \cdots & -sin(\pi t) & cos(\pi t) \end{pmatrix}$

(а) Покажите, что $[\gamma] \neq e$, то есть, что петля $\gamma(t)$ является представителем образующей $\pi_1(SO_n)$ для $n \geqslant 3$.

(б) Докажите равенство в $\pi_1(Spin_{2k}) : [\alpha]^2 = [\gamma]^k$.

(в) Пусть $G \xrightarrow{p} H$ – накрытие связных групп Ли. Покажите, что существует точная последовательность $1 \to ker(p) \to Z(G) \to Z(H) \to 1$.

(г) Докажите, что $Z(Spin_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ если } n = 2k+1; \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \text{ если } n = 4k+2; \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ если } n = 4k. \end{cases}$

Указание: покажите, что центр спинорной группы порождается $[\alpha]$ *и* $[\gamma]$.

Задача 3. Опишите все связные группы Ли, алгебра Ли которых равна $\mathfrak{so}_n$ для $n > 2$. (Три из них имеют специальные названия – $Spin_n, SO_n, PSO_n$).

Задача 4. (а) Опишите все связные виртуальные подгруппы в группе Ли SO_3. Какие из них замкнуты, то есть являются подгруппами Ли? Какие из них нормальны?

(б) Опишите все морфизмы из группы SO_3 в группу Aff_1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. (а) Опишите все структуры группы Ли на $\mathbb{R}^2$.

(б) Постройте по крайней мере три различных структуры группы Ли на $\mathbb{R}^3$ (в частности, докажите, что предъявленные группы Ли не диффеоморфны).

Задача 2. (а) Покажите, что группа $GL_n(\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна группе U_n

(б) Покажите, что группа SU_n односвязна.

(в) Вычислите центр группы SU_n и опишите все связные группы Ли, алгебра Ли которых совпадает с $\mathfrak{su}_n$. В частности, покажите, что все они компактны.

(г) Вычислите фундаментальную группу и центр $SL_n(\mathbb{C})$.

Дополнительные задачи

Задача 3. (а) Покажите, что умножение слева и справа на матрицы задает действие группы $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ на пространстве матриц 2×2, сохраняя квадратичную форму $det(X)$. Назовем соответсвующий гомоморфизм групп $\tilde{p} : SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$.

(б) Рассмотрите вещественное 4-мерное подпространство в пространстве матриц, состоящее из матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$ и постройте гомоморфизм $p : SU_2 \times SU_2 \to SO_4(\mathbb{R})$.

(в) Покажите, что $Spin_4 = SU_2 \times SU_2$

(г) Опишите все (виртуальные) подгруппы Ли в SO_4.

Задача 4. Опишите:

(а) Все связные группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$;

(б) Все связные *вещественные* группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$;

(в) * Укажите континуальное семейство попарно неизоморфных связных комплексных групп Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Задача 5. Докажите, что на $S^1 \sqcup S^1$ существует ровно три различных структуры группы Ли.