НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 6.
Подмногообразия. Векторные поля и распределения. 21.11.2025.

Задача 1. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ гладкое отображение, а X гладкое векторное поле на M, причём $d_x\varphi(X_x) = d_y\varphi(X_y)$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$. Обязательно ли существует гладкое векторное поле на N, φ-связанное с X?

Задача 2. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ гладкое отображение, X_M, Y_M векторные поля на M, а X_N, Y_N соответственно φ-связанные с ними векторные поля на N. Доказать, что тогда $[X_M, Y_M]$ и $[X_N, Y_N]$ тоже φ-связаны.

Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p\iota : T_pN \longrightarrow T_{\iota(p)}M$ изоморфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_pN$ с $d_p\iota(X) \in T_{\iota(p)}M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N, подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)}N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$. Докажите, что коммутатор двух векторных полей на M, касательных к подмногообразию N, — тоже векторное поле, касательное к N.

Задача 3. Пусть $N \subset M$ подмногообразие. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$, такую, что $\gamma((a, b)) \subset N$. Покажите, что не обязательно $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}N$ для каждого $t \in (a, b)$.

Задача 4. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Докажите, что $(\mathbb{R}, \varphi)$ — плотное подмногообразие в $\mathbb{T}$ (оно называется плотной обмоткой тора). Это подмногообразие вложенное?

Задача 5. Построить пример такой поверхности Σ в $\mathbb{R}^n$, что её сечение $\Sigma \cap H$ некоторой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$ не является подмногообразием.

Задача 6*. Пусть M — гладкое многообразие и A — подмножество в M. Фиксируем топологию на A. Тогда на A существует не более одной структуры гладкого многообразия, такой, что (A, i) — подмногообразие в M, где i — отображение вложения.

Задача 7*. Пусть снова A — подмножество в M. Если в индуцированной топологии A обладает структурой гладкого многообразия, такой, что (A, i) — подмногообразие M, то на A существует единственная структура многообразия, то есть единственная локально евклидова топология с второй аксиомой счётности и единственная дифференцируемая структура, такая, что (A, i) — подмногообразие в M.

Задача 8. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением $dz = y dx$. Нарисуйте это поле плоскостей. Докажите, что у него нет интегральной поверхности.

Задача 9. В пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$, z рассмотрим поле гиперплоскостей (называемое распределением Картана), заданное уравнением

$$dz = \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i.$$

Какова максимальная размерность интегрального подмногообразия?

Задача 10. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал форм на многообразии M, локально порожденный на области $U \subset M$ независимыми 1-формами $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Доказать, что $\mathcal{J}$ является дифференциальным идеалом тогда и только тогда, когда для формы $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$ существует такая 1-форма α, что $d\omega = \alpha \wedge \omega$.