

## ГАУССОВЫ ЧИСЛА, ЧИСЛА ЭЙЗЕНШТЕЙНА.

**Задача 1.** Найдите в  $\mathbb{Z}[i]$  наибольший общий делитель элементов  $47 - 13i$  и  $53 + 56i$  и его линейное выражение.

**Задача 2. а)** Докажите, что  $\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ . **б)** Докажите, что  $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1)$  не изоморфно  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , но изоморфно некоторому подкольцу в  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (опишите его явно).

**Задача 3.** Найдите все целочисленные решения уравнения **а)**  $x^2 + 1 = y^3$ ; **б\*)**  $x^2 + 1 = y^n$ .

**Задача 4.** Пусть  $p = a + bi$  — простое гауссово число. Докажите, что  $\mathbb{Z}[i]/(p\mathbb{Z}[i])$  — конечное поле. Сколько в нём элементов?

**Задача 5.** Докажите, что натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда когда в разложение на простые множители простые числа вида  $p = 4k + 3$  входят в чётных степенях.

**Задача 6.** Пусть  $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Определим  $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ .

**а)** Докажите, что  $\mathbb{Z}[\omega]$  — кольцо. Докажите, что  $|a + b\omega| = a^2 - ab + b^2$ . Найдите все обратимые элементы в  $\mathbb{Z}[\omega]$ .

**б)** Докажите, что в  $\mathbb{Z}[\omega]$  возможно деление с остатком.

**в\*)** Докажите, что любое простое число Эйзенштейна это либо

- $x \cdot p$ , где  $x \in \mathbb{Z}[\omega]$  — обратим, а  $p = 3k + 2 \in \mathbb{Z}$  — простое;
- $(a + b\omega)$ , где  $a^2 - ab + b^2 = p$ . Здесь  $p = 3$  или  $p = 3k + 1 \in \mathbb{Z}$  — простое.

**г)** Опишите все поля, которые получаются как кольца остатков при делении на простые числа Эйзенштейна.

**Задача 7.** Используя равенство  $x^3 + y^3 = (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y)$  докажите *теорему Ферма* для  $n = 3$ : не существует решений уравнения  $x^3 + y^3 = z^3$ , где  $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Задача 8.** Пусть  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Пусть  $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = \{a + b\sqrt{-d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ .

**а)** Докажите, что  $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$  — область целостности.

**б)** Докажите, что в кольце  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  возможно деление с остатком.

**в)** Предъявите элемент в кольце  $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ ,  $d \geq 3$ , который разлагается в произведение простых двумя различными способами (прежде, объясните, что означает быть простым элементом в этом кольце). Возможно ли деление с остатком в этом кольце?