

## Листок 2

**Задача 2.1.** При  $|q| < 1$  найдите суммы рядов и пределы этих сумм при  $q \rightarrow -1$

а)

$$q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n + \dots$$

б)

$$q + 4q^2 + 9q^3 + \dots + n^2q^n + \dots$$

**Задача 2.2.** Найдите суммы рядов

а)

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

б)

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

в\*) Для произвольного натурального  $k \geq 2$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} + \dots$$

**Задача 2.3.**

а) Докажите, что

$$\sin(1) + \dots + \sin(n) = O(1)$$

б) Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1)^2 + \dots + \sin(n)^2}{n}.$$

**Задача 2.4.** Пусть  $\alpha$  — иррациональное вещественное число. а) Докажите, что существует бесконечно много пар взаимно простых целых чисел  $a, q$ , для которых

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < 1/q^2$$

б) Докажите, что множество

$$\{n + m\alpha : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

плотно в  $\mathbb{R}$ .

**Задача 2.5.** Докажите, что существует число  $c > 0$  такое, что для всех целых  $a, q$  с ненулевым  $q$  выполнено неравенство

$$\left| \sqrt{2} - \frac{a}{q} \right| \geq \frac{c}{q^2}.$$

Иными словами,  $\sqrt{2}$  — плохо приближаемое число.

**Задача 2.6.**

а) Докажите, что число  $e$  иррационально.

б\*) Докажите, что число  $e$  не является квадратичной иррациональностью, то есть если хотя бы одно из целых чисел  $A, B, C$  не равно 0, то  $Ae^2 + Be + C \neq 0$ .

**Задача 2.7.** Докажите, что последовательность  $a_n$  сходится, найдите её предел и оцените скорость сходимости

$$\text{а) } a_n = \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{3}}}}_{n \text{ квадратных корней}}$$

$$\text{б) } a_n = \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots \sqrt{2}}}}}_{n \text{ квадратных корней}}$$

**Задача 2.8.** Поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  состоит из всех чисел вида  $a + b\sqrt{5}$  с рациональными  $a$  и  $b$ .

Опишите все отношения порядка на  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , которые превращают его в упорядоченное поле.