ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 2: КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ. МНОГООБРАЗИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Опишите кольцо $H^*(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ в терминах колец $H^*(X_\alpha)$.

2. Докажите, что внешнее умножение $H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y)$ — гомоморфизм колец.

3. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x.

4. Докажите, что многообразие M ориентируемо, если $H^1(M; \mathbb{Z}/2) = 0$.

5. Докажите, что для компактного многообразия M с краем существует открытая окрестность края $U \supset \partial M$ и гомеоморфизм $U \cong \partial M \times [0,1)$, при котором $\partial M \subset U$ переходит в $\partial M \times \{0\}$.

6. Пусть M — связное n-мерное многообразие без края с конечно порожденными группами гомологий. Найдите группы $H_n(M; \mathbb{Z})$ и $H^n(M; \mathbb{Z})$.
а) M компактное ориентируемое; **б)** M компактное неориентируемое;
в) M некомпактное ориентируемое; **г)*** M некомпактное неориентируемое.

7. *Связная сумма* n-мерных многообразий M_1 и M_2 — это топологическое пространство $M_1 \# M_2 := (M_1 \setminus U_1) \cup_{\partial U_1 \simeq \partial U_2} (M_2 \setminus U_2)$, где $U_i \subset M_i$ — маленькие[1] открытые диски (таким образом, $\partial U_1 \simeq S^{n-1} \simeq \partial U_2$).
а) Докажите, что пара многообразий $M_1 \# M_2$, $M_1 \# \overline{M_2}$ определена однозначно с точностью до гомеоморфизма.
б) Пусть M — связная сумма нескольких многообразий вида $S^i \times S^{n-i}$, $0 < i < n$. Опишите кольцо $H^*(M)$.
в) Опишите кольца когомологий многообразий $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$. Какие из них изоморфны?

8. Пусть M_1, M_2 — замкнутые n-мерные многообразия.
а) Докажите, что $H_i(M_1 \# M_2) \cong H_i(M_1) \oplus H_i(M_2)$ при $0 < i < n-1$.
б) Докажите, что $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(S^n)$.
в) Опишите группу $H_{n-1}(M_1 \# M_2; \mathbb{Z})$.

---

[1] U_i — образ множества $\{||x|| < 1/2\}$ при гомеоморфном вложении $\{||x|| \le 1\} = D^n \hookrightarrow M_i$.