

Листок 7

Задача 7.1. Докажите, что $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$. Сравните приближение к π , получающееся из трёх первых слагаемых разложения $\operatorname{arctg}(x)$ и формулы выше с приближением $\pi = 4\operatorname{arctg}1$, использующим первые 10 слагаемых ряда Тейлора.

Задача 7.2. Вычислите неопределенные интегралы

а) $\int x(3-x^2)^{10}dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{6x-1}}$ в) $\int \frac{x^2}{1+3x^2}dx$ г) $\int e^{\cos(x)} \sin(x)dx$
 д) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ е) $\int x^n \ln x dx$ ж) $\int x \operatorname{arctg} x dx$

Задача 7.3. Вычислите определенные интегралы

а) $\int_0^\pi \sin(x)dx$ б) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ в) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx := \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x^n e^{-x} dx$ г) $\int_0^1 \ln \sin(\pi x) dx$

Задача 7.4. При помощи интегралов найдите пределы

а)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$

б)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{-n \leq k \leq n} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2}{n}$$

Задача 7.5. Докажите, что для любого $n \geq 0$ существует и единственен такой многочлен $f_n(x)$, что

$$\int x^n e^x dx = f_n(x) e^x + C$$

Найдите рекуррентную формулу для $f_n(x)$. Вычислите $f_n(0)$ и $f_n(1)$.

Задача 7.6. Докажите, что для чётных n многочлен $f_n(x)$ положителен и имеет единственную точку минимума x_n . Сходится ли последовательность $\frac{f_{2n}(x_{2n})}{(2n)!}$?

Задача 7.7. Пусть f — выпуклая функция на отрезке I , $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in I$ и для всех $i \leq n$ выполнено $x_i \geq x_{i-1}$, $x_1 + \dots + x_i \geq y_1 + \dots + y_i$. Пусть, кроме того, $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$. Докажите, что

$$\sum_{i \leq n} f(x_i) \geq \sum_{i \leq n} f(y_i).$$

Задача 7.8. Пусть H — гильбертово пространство. Докажите, что оно *равномерно выпукло*, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x, y \in H$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$, то $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Задача 7.9. Пусть $e_1, \dots, e_n, \dots$ — ортонормированная система, то есть $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Докажите, что для любого $x \in H$ выполнено

$$\sum_n \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2,$$

причем для всех x достигается равенство тогда и только тогда, линейная оболочка данной системы плотна в H .