Многочлены и конечные поля.

Задача 1.
Найдите обратный к $f(x)$ в кольце вычетов $\Bbbk[x]/(g(x))$, если такой существует.
а) $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $f(x) = x^6 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$;
б) $\Bbbk = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^7 + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

Задача 2. а) Пусть $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$ — поле из четырёх элементов, которые мы обозначим $\{0, 1, [\alpha], [\alpha+1]\}$. Найдите все делители нуля и все обратимые элементы (и обратные к ним) в кольце $\mathbb{F}_4[x]/(x^2 + [\alpha+1]x + [\alpha])$.
б) Постройте явно изоморфизм полей $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x + 2)$ и $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$.

Задача 3. Классифицируйте кольца вида $\mathbb{R}[x]/(ax^2+bx+c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма.

Задача 4. а) Докажите, что число $3285896971294105363092729678843170404434204101 5625 = 5^{31}13^{25}$ является суммой двух квадратов целых чисел. **б)** Решите в комплексных числах уравнение $z^2 - (3-i)z + 4 - 3i = 0$. **в)** Вычислите $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots$. **г)** Докажите, что комплексные точки a, b, c, d лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ является вещественным числом.

Задача 5. а) Найдите все решения в $\mathbb{C}$ уравнения $z^n = 1$, $a \in \mathbb{C}$. Докажите, что они образуют группу μ_n.
б) Докажите, что группа μ_n – циклическая (порождена одним элементом). Образующая этой группы называется первообразным корнем. Найдите количество первообразных корней.
в) Пусть $\Phi_n(x) = \prod(x - z_i)$, где z_i пробегает все первообразные корни степени n. Докажите, что

$$x^n - 1 = \prod_{d\,|\,n} \Phi_d(x)$$

г) Докажите, что $\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$, где μ – функция Мёбиуса. Сделайте вывод, что $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
д*) Докажите, что $\Phi_n(x)$ – неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.
е*) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $kn + 1$, где $k, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Задача 6. а) Пусть $\Bbbk$ – поле. Докажите, что группа $\mu_n(\Bbbk) := \{x \in \Bbbk \,|\, x^n = 1\}$ – циклическая. Приведите пример, когда $|\mu_n(\Bbbk)| < n$.
б*) Может ли группа обратимых элементов бесконечного поля быть циклической?

Задача 7. Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле. **а)** Докажите, что любая функция $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ является многочленом. Приведите пример двух различных ненулевых многочленов, задающих одинаковую функцию. **б*)** Докажите, что любая функция $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ является многочленом.