ЭКЗАМЕН

Правила: *экзамен проводится в домашнем формате, но строго индивидуально и без использования ИИ. При подозрении на несамостоятельность решения задач, может быть назначено дополнительное собеседование или объявлено полное аннулирование экзамена. Количество решенных задач равняется оценке за экзамен. Принимаются также частичные решения; за такие решения можно получить не более одного балла (например 0,5 балла).*

Решения задач принимаются с 18 мая 12:00 по 19 мая 12:00 (время московское). Решения, полученные после указанного времени не принимаются к рассмотрению.

Решения присылаются на почту vomedvedev@hse.ru в следующих форматах: фото записанных от руки задач, решения набранные в LaTex, записи в приложениях на планшете и т.п. Пожалуйста, убедитесь, что решения задач читаемы (если написаны от руки).

1. Изучите "доказательство" Теоремы 3.14 в книге D. Lee, *Geometric Relativity*, и представьте его строгое доказательство. Эта теорема утверждает, что АДМ-масса конца M_k асимптотически плоского многообразия (M^n, g) может быть вычислена как

$$m_{ADM}(M_k, g) = \lim_{i\to\infty} \frac{-1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma_i} G(X, \nu_\delta)\, ds_\delta,$$

где G — тензор Эйнштейна, X — векторное поле $x^j\partial_j$ на M_k в асимптотически плоской координатной карте конца, $(\Sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность, исчерпывающая M_k в том смысле, что множества $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ с $\partial\Omega_i = \Sigma_i$ исчерпывают M_k и

$$|\Sigma_i| \leqslant C \left(\inf_{x\in\Sigma_i} |x|\right)^{n-1},$$

где константа $C > 0$ не зависит от i.

2. Докажите, что любое гармонически плоское многообразие (M, g) является асимптотически плоским и вычислите его АДМ-массу через коэффициенты разложения определяющей гармонической функции.

3. Пусть (M, b) — статическое опорное многообразие со статическим потенциалом V и (M, g) — асимптотически локально гиперболическое относительно (M, b). Докажите, что

$$-\frac{n-2}{2} m_{WCH}(g, V) = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (\mathrm{Ric}_g + (n-1)g)(\nabla^{\mathrm{b}} V, \nu)\, ds_{\mathrm{b}}.$$

Напомним, что $S_r = \{r\} \times N$, где (N, h) — конформная бесконечность.

4. Пусть (M^3, g) — асимптотически плоское многообразие. Пусть Σ_ρ — координатная сфера радиуса ρ в асимптотически плоской координатной карте. Докажите, что

$$\lim_{\rho\to\infty} m_{\mathrm{Haw}}(\Sigma_\rho) = m_{\mathrm{ADM}}(g).$$

5. Покажите, что граница статического многообразия с краем, которое также является асимптотически шварцшильдовской системой, является квазилокальной фотонной поверхностью.

6. Пусть (M, g, V) — статическое многообразие с краем, являющееся асимптотически шварцшильдовской системой. Пусть P — эквипотенциальная фотонная поверхность в $(\mathbb{R}\times M, -V^2dt^2 + g)$. Докажите, что

a) пересечение $P \cap M$ вполне омбилично в M;

b) средняя кривизна H пересечения $P \cap M$ постоянна;

c) если $(\mathbb{R} \times M, -V^2dt^2 + g)$ удовлетворяет условию нулевой энергии, то в дополнение к (b) выполнено $H > 0$.

Указание: Используйте сокращенное уравнение Гаусса.

7. Докажите, что гиперповерхность $r = (mn)^{\frac{1}{n-2}}$ в $(n+1)$-мерном пространстве-времени Шварцшильда является фотонной сферой.

8. Пусть (Σ^2, γ, η) — данные Бартника с положительной гауссовой кривизной и $\eta > 0$. Покажите, что

$$m_{\mathrm{Haw}}(\Sigma, \gamma, \eta) \leqslant m_{\mathrm{BY}}(\Sigma, \gamma, \eta).$$

9. Напомним, что *(риманово) неравенство Пенроуза* может быть сформулировано следующим образом. Пусть (M^n, g) — полное асимптотически плоское многообразие с неотрицательной скалярной кривизной, и пусть Σ — *видимый горизонт* относительно некоторого конца M_k. Тогда

$$m_{\mathrm{ADM}}(M_k, g) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Более того, в случае равенства часть M вне Σ изометрична половине шварцшильдовского пространства массы $m_{\mathrm{ADM}}(M_k, g)$.

Покажите, что гипотеза не выполняется, если заменить предположение о том, что Σ является *видимым горизонтом*, на предположение, что Σ — это охватывающая минимальная гиперповерхность.

Указание: Попробуйте деформировать метрику Шварцшильда таким образом, чтобы за видимым горизонтом создалась большая минимальная поверхность.

10. Пусть (M, g, V) — трёхмерное асимптотически локально гиперболическое многообразие, являющееся статическим многообразием с краем. Докажите, что

$$8\pi m = -\int_M V\,|\mathring{\mathrm{Ric}}_g|_g^2\,dv_g - \sum_{j=1}^{b} H_j\left(\frac{H_j^2}{4} - 1\right)\int_{S_j} V\,ds_g + \sum_{i=1}^{r} \kappa_i\big(2\pi\chi(\Sigma_i) + |\Sigma_i|\big).$$