

**ВШЭ, риманова геометрия. Листок 9.**  
**Якобиевы поля. 17.04.2022.**

**Задача 1.** Пусть риманово многообразие имеет постоянную секционную кривизну  $k$ . Доказать, что  $R(X, Y)Z = k((Y, Z)X - (X, Z)Y)$ .

**Задача 2.** Пусть  $M$  снабжённое индуцированной метрикой подмногообразие риманова многообразия  $\bar{M}$ . Пусть  $X, Y \in T_p M$ ,  $\sigma = \text{span}(X, Y)$ , а  $K_\sigma$  и  $\bar{K}_\sigma$  обозначают секционные кривизны  $M$  и  $\bar{M}$  соответственно. Доказать, что

$$K_\sigma = \bar{K}_\sigma + \frac{(B(X, X), B(Y, Y)) - |B(X, Y)|^2}{|X|^2|Y|^2 - (X, Y)^2}.$$

**Задача 3.** (Теорема Морса-Шёнберга). Пусть  $M$  риманово многообразие,  $\gamma(t)$  геодезическая с  $|\gamma'(t)| = 1$ , и существует  $\delta > 0$ , такая, что в точках этой геодезической для  $t \in [0, \beta]$  все секционные кривизны  $K_\sigma \leq \delta$ . Тогда если  $\gamma(\beta)$  сопряжена с  $\gamma(0)$  на этой геодезической, то  $\beta \geq \pi/\delta$ .

**Задача 4\*.** Пусть  $p \in M$ ,  $X, Y \in T_p M$ ,  $\gamma(t) = \exp_p tX$  и  $J$  поле Якоби вдоль  $\gamma$  с начальными данными

$$J(0) = 0, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} J(0) = Y.$$

Доказать, что

$$d_{tX} \exp_p(Y) = \frac{J(t)}{t}.$$

Доказать, что подпространство  $\text{Ker } d_X \exp_p$  изоморфно пространству полей Якоби вдоль  $\gamma(t) = \exp_p tX$  с нулями в  $p$  и  $\exp_p X$ .

**Задача 5\*.** Доказать, что на римановом многообразии

$$d(x, y) = \sup\{|\psi(x) - \psi(y)| : \psi \in C^\infty, |\text{grad } \psi| \leq 1\}.$$

**Задача 6\*.** Пусть  $M$  полное некомпактное риманово многообразие. Докажите, что для любой точки  $p$  существует геодезический луч, выходящий из  $p$ , то есть геодезическая  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ , такая, что  $\gamma(0) = p$  и  $d(p, \gamma(t)) = t$  для любого  $t > 0$ .