

Программа курса по комбинаторной теории групп

Андроник Арутюнов, Олег Муравьев, Алексей Наянзин

Осень 2025 г.

1 Аннотация

В курсе будет рассказано об основных конструкциях комбинаторной теории групп и о двойственных им геометрических конструкциях. Одним из основных утверждений будет теорема Зейферта-ван Кампена устанавливающая связь между амальгамированным произведением групп и склейкой пространств. Будут указаны и другие геометрические интерпретации, в частности диаграммы ван кампена, позволяющие решать проблему равенства для некоторых классов групп, в частности гиперболических.

2 Содержание курса

1. **Графы Кэли** Действия групп на множествах. Графы Кэли. Свободные группы. Вершинная транзитивность, гипотеза Ловаса.
2. **Группы и их копредставления.** [LS80; MKC74] Копредставления групп. Теорема Титце. Квазиизометричность графов Кэли, виртуальные свойства. [Кля23]
3. **Диаграммы ван Кампена.** Лемма ван Кампена. Проблема равенства. Алгоритм Дэна.
4. **Теория малых сокращений.** Лемма Гриндленгера. Проблема Бёрнсайда для малых степеней. Алгоритм Дэна. [SGV13]
5. **Гиперболические группы.** Разные определения. Виртуальная гиперболичность. Теорема Ольшанского (без доказательства).

6. **Фундаментальная группа, топологические конструкции.** Фундаментальная группа букета, теорема Уайтхеда. Комплекс Эйленберга-Маклейна. Реализация группы как фундаментальной. [Sti95]
7. **Накрытия.** Теорема Нильсена-Шрейера.
8. **Свободные конструкции:** HNN-расширение, свободное произведение, свободное произведение с объединенной подгруппой. Теорема Зейферта-ван Кампена [Ipa04]. Топологическая интерпретация HNN расширений [SW79].
9. **Источники копредставлений:** группа узла, группы поверхностей.
10. **Группы с одним определяющим соотношением.** Теорема Магнуса о свободе.
11. **Теорема Куроша и Грушко.**
12. **Концы группы.** Теорема Хопфа. Концы гиперболических групп. Теорема Столинга-Свона. [Krö10]

3 Пререквизиты курса

Основные понятия теории групп: коммутант, нормальные подгруппы, разрешимые и нильпотентные группы. Простые группы.

Топология: π_1 , клеточный комплекс. Многообразия.

Список литературы

- [Krö10] Bernhard Krön. *Cutting up graphs revisited - a short proof of Stallings' structure theorem*. 2010. arXiv: 1003.1096 [math.GR]. URL: <https://arxiv.org/abs/1003.1096>.
- [LS80] Roger C. Lyndon и Paul E. Schupp. *Комбинаторная теория групп*. Под ред. В. Н. Ремесленников. Перевод с английского. М.: Мир, 1980, с. 447. URL: <http://booksshare.net/books/math/lindon-r/1980/files/kombinatornteori1980.djvu>.
- [SGV13] Mark V. Sapir, Victor S. Guba и Mikhail V. Volkov. *Non-commutative combinatorial algebra: Syntax and semantics*. Springer, 3 авг. 2013. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=63c4132c2cf96da1cda4650b85c12b59ee3cf900>.

- [Sti95] John Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory*. en. 2-е изд. Graduate texts in mathematics. New York, NY: Springer, авг. 1995.
- [SW79] Peter Scott и Terry Wall. “Topological methods in group theory”. В: *Homological group theory*. Под ред. С. Т. С. Wall. London Mathematical Society Lecture Note Series 36. (Durham, UK, September 1977). MR:564422. Zbl:0423.20023. Cambridge University Press, 1979, с. 137—203. ISBN: 9780521227292.
- [Кля23] Антон Клячко. *Спецкурс по теории групп*. Материалы спецкурса, читаемого на механико-математическом факультете МГУ. МГУ им. М.В. Ломоносова. 2023. URL: <https://halgebra.math.msu.su/staff/klyachko/sk.htm> (дата обр. 16.11.2023).
- [МКС74] Вильгельм Магнус, Абрахам Каррас и Дональд Солитэр. *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и определяющих соотношений*. Перевод с английского. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [Пра04] В. В. Прасолов. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. Издание доступно для свободного скачивания. Москва: Издательство МЦНМО, 2004. URL: <https://old.mccme.ru/free-books/prasolov/topol.pdf> (дата обр. 16.11.2023).