

Распределение случайных величин

Задача 1. Студент готовится к экзамену следующим образом. В начале каждого часа он подбрасывает монету. Если выпадает орел, то он наудачу выбирает число x из отрезка $[0, 1]$ такую часть времени в течении данного часа тратит на подготовку, а остальное время отдыхает. Если выпадает решка, то студент половину часа отдыхает, а остальную половину готовится. Случайная величина ξ – время, затраченное студентом на подготовку. Найдите функцию распределения случайной величины ξ и нарисуйте ее график.

Задача 2. Функции распределения F_1 и F_2 удовлетворяют неравенству $F_1 \leq F_2$. Докажите, что можно построить такое вероятностное пространство и такие случайные величины ξ_1 и ξ_2 с функциями распределения F_1 и F_2 , что $P(\xi_1 \geq \xi_2) = 1$.

Задача 3. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – диффеоморфизм. Предположим, что распределение случайной величины ξ имеет плотность ϱ . Найдите плотность распределения величины $f(\xi)$. Приведите пример таких гомеоморфизма $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и случайной величины ξ , распределение которой имеет плотность, что у распределения случайной величины $f(\xi)$ плотности нет.

Задача 4.

(а) Пусть τ_1 – число бросаний до первого успеха в схеме Бернулли с вероятностью успеха p . Пусть τ_2 – число бросаний после первого успеха до появления второго успеха. Найдите совместное распределение случайных величин τ_1 и τ_2 .

(б) Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет меньше пяти очков. Пусть ξ – число очков, выпавших при последнем бросании, а η – число бросаний. Найдите совместное распределение ξ и η .

Задача 5. Пространство исходов Ω состоит из пяти элементов, каждый из которых имеет положительную вероятность. Существуют ли на Ω две независимые случайные величины, каждая из которых принимает пять различных значений?

Задача 6. Докажите, что из независимости ξ и $f(\xi)$ следует, что $f(\xi) = \text{const}$ почти наверное.

Задача 7. Существуют ли независимые случайные величины X и Y такие, что каждая из них не является константой с вероятностью единица и $X^2 + Y^2 \equiv 1$?

Задача 8.

(а) Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Через ξ_n обозначим n -ю цифру двоичной записи ξ . Докажите, что $P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}$ и ξ_n – последовательность независимых случайных величин.

(б) Пусть ξ_n – последовательность независимых случайных величин, причем $P(\xi_n = 1) = 1 - P(\xi_n = 0) = p$. Докажите, что при $p = \frac{1}{2}$ величина $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 2^{-n}$ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Проверьте, что при $p \neq \frac{1}{2}$ и $0 < p < 1$ величина ξ имеет непрерывную функцию распределения, но не имеет плотности распределения.

Задача 9. (Закон 0 и 1 Хьюитта и Сэвиджа) Множество $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty})$ назовем перестановочным, если для всякой перестановки π натурального ряда, переставляющей лишь конечно число элементов, верно равенство $\{(x_n): (x_{\pi(n)}) \in B\} = B$. Докажите, что для всякой меры $P = \otimes_n \mu$, где μ – вероятностная борелевская мера, $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$. Переформулируйте это утверждение в терминах последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.

Задача 10. Какие из следующих множеств перестановочны: (а) $\{(x_n): \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a\}$, (б) $\{(x_n): x_{2025} \leq 1\}$, (с) $\{(x_n): \sum_{n=1}^N x_n = 0 \text{ для бесконечного числа номеров } N\}$?

Математическое ожидание

Задача 11. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ , имеющей распределение:

(а) $P(\xi = k) = C_N^k p^k q^{N-k}$, $0 \leq q = 1 - p \leq 1$, $0 \leq k \leq N$, (б) $P(\xi = k) = q^{k-1} p$, $0 \leq q = 1 - p \leq 1$, $1 \leq k$,

(с) $P(\xi = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$, $0 < \lambda$, $0 \leq k$, (д) $P(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, где $M \leq N$, $n \leq N$, $0 \leq m \leq \min\{M, n\}$ (случайная величина ξ равна количеству вытащенных белых шаров, когда из ящика без возвращения вынимают n шаров, а в ящике N шаров, из которых M белых).

Задача 12. (а) Бросают сто игральных костей. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

(б) Сто писем разложили по ста конвертам, на которых уже были написаны адреса, случайным образом. Найдите математическое ожидание количества писем, лежащих в конвертах с правильными адресами.

(с) Случайный граф получается удалением ребер из полного графа на n вершинах, причем вероятность удаления ребра равна $q = 1 - p$ и ребра удаляются независимо друг от друга. Случайная величина ξ – число треугольников в графе. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ .

Задача 13. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, положительны и одинаково распределены. Найдите $\mathbb{E} \frac{X_1 - X_2 + X_3}{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}$.

Задача 14. (а) Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n , имеющих геометрическое распределение, т. е. $P(\xi_n = k) = pq^{k-1}$, $q = 1 - p$. Найдите распределение случайных величин $\tau = \min\{n \geq 1: \xi_n > 1\}$ и ξ_τ , вычислите $\mathbb{E}\tau$, $\mathbb{E}\xi_\tau$.

(б) Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n , имеющих распределение Пуассона с параметром 1. Найдите распределение случайных величин $\tau = \min\{n \geq 1: \xi_n > 1\}$ и ξ_τ , вычислите $\mathbb{E}\tau$, $\mathbb{E}\xi_\tau$.

Задача 15. Вводя подходящее вероятностное пространство и используя линейность и монотонность математического ожидания, решите следующие задачи.

(а) В каждой клетке шахматной доски стоит плюс или минус, причем число плюсов равно числу минусов. Докажите, что можно так расставить восемь ладей, что они не бьют друг-друга и не менее четырех из них стоят на плюсах.

(б) Окружность покрасили в два цвета – красный и синий, причем длина множества красных точек не меньше $2/3$ длины окружности. Докажите, что в окружность можно вписать квадрат так, что у него будет хотя бы три красные вершины.

(с) На белой сфере есть черное пятно, занимающее не более $1/10$ ее поверхности. Докажите, что в сферу можно вписать куб так, что все его вершины будут белыми.

(д) Пусть $v_1, \dots, v_n$ – вектора единичной длины в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что найдутся такие числа $\alpha_i = \pm 1$, что $\|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\| \leq \sqrt{n}$.

Задача 16. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, функция распределения которой – функция Кантора.

Задача 17. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ , $\xi + \eta$, $\max\{\xi, \eta\}$, если вектор (ξ, η) имеет равномерное распределение на

(а) $[0, 1]^2$, (б) $\{(x, y): 0 < y < 1 - x\}$, (с) $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Задача 18.

(а) Найдите математическое ожидание и дисперсию $\xi + \eta$, $\sin(\xi\eta)$, $\max\{\xi, \eta\}$, если ξ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, η имеет биномиальное распределение с параметрами n и p и эти величины независимы.

(б) Пусть ξ_1 имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1, ξ_2 имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а величина η такова, что $p = P(\eta = 1) = 1 - P(\eta = 2)$ и η независимы с ξ_1 и ξ_2 . Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ_η .

Задача 19. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F . Через $X_{(k)}$ обозначаем k -е по порядку значение величин X_i , расположенных в порядке возрастания. Найдите распределение $X_{(k)}$. В случае, когда X_i имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, найдите совместное распределение $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ и вычислите $\mathbb{E}X_{(1)}^p X_{(n)}^q$, где $p \geq 1$, $q \geq 1$.

Задача 20. Точки $A_1, \dots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение в единичном круге B . Случайное множество Q состоит из тех точек круга B , которые находятся ближе к центру круга, чем к его границе и к любой из точек A_i . Найдите математическое ожидание площади множества Q .

Задача 21. Пусть $|\xi| \leq 1$. Найдите максимально возможное значение $\mathbb{D}\xi$.

Задача 22. Правомерно ли утверждение: «От метро до университета 1 км, хожу я в среднем со скоростью 5 км/час, следовательно, в среднем на дорогу у меня уходит 12 минут»? Станет ли утверждение верным, если сказать, что на дорогу уходит не менее 12 минут?