

ТОПОЛОГИЯ–2

ЛИСТОЧЕК 2: ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Рассмотрим коммутативную диаграмму групп (и гомоморфизмов)

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{a_1} & A_2 & \xrightarrow{a_2} & A_3 & \xrightarrow{a_3} & A_4 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\
 B_1 & \xrightarrow{b_1} & B_2 & \xrightarrow{b_2} & B_3 & \xrightarrow{b_3} & B_4
 \end{array}$$

Пусть её строки точны, то есть, образ каждой (горизонтальной) стрелки равен ядру следующей стрелки: $\text{im}(a_i) = \ker a_{i+1}$, $i = 1, 2$, и аналогично для b_i .

а) Докажите, что если отображения f_2 и f_4 инъективны, а отображение f_1 сюръективно, то f_3 инъективно.

б) Докажите, что если отображения f_1 и f_3 сюръективны, а отображение f_4 инъективно, то f_2 сюръективно.

В частности, если у нас есть коммутативная диаграмма групп

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
 B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
 \end{array}$$

с точными строками, в которой f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то f_3 тоже изоморфизм.

2. а) Вспомните, как по пути $\gamma: I \rightarrow X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ определяется изоморфизм групп $L_\gamma: \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$, убедитесь, что он зависит только от класса гомотопии пути γ (с закреплёнными концами) и для композируемых путей имеет место равенство $L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_2} = L_{\gamma_1 \gamma_2}$. Проверьте, что для гомотопии $F: X \times I \rightarrow Y$ между отображениями $f, g: X \rightarrow Y$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, f(x_0)) \\
 & \searrow g_* & \uparrow L_\gamma \\
 & & \pi_n(Y, g(x_0))
 \end{array}$$

где $\gamma(t) = F(x_0, t)$ — путь между $f(x_0)$ и $g(x_0)$.

Выведите, что любая гомотопическая эквивалентность (не обязательно пунктированная) является слабой эквивалентностью.

б) В частности, мы получаем (левое) действие $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$. Убедитесь, что изоморфизмы L_γ вообще не зависят от пути $\iff$ это действие тривиально (для любой отмеченной точки $\iff$ для одной отмеченной точки в каждой компоненте линейной связности). То есть, для линейно связного пространства в случае тривиального действия можно считать, что гомотопические группы вовсе не зависят от точки и писать просто $\pi_n(X)$, отождествляя их с помощью единственных изоморфизмов L_γ .

в) Сформулируйте и докажите аналоги для относительных групп $\pi_n(X, A, x_0)$.

3. а) Согласно предыдущей задаче, мы имеем (левое) действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$ (и соответственно $\pi_1(A, x_0)$ — на $\pi_n(A, x_0)$) и (левое) действие группы $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi_n(X, A, x_0)$ (включая пунктированное множество при $n = 1$). Вспомните также, как группа $\pi_1(X, x_0)$ действует (слева) на пунктированном множестве $\pi_1(X, A, x_0)$.

Проверьте, что для гомотопической длинной точной последовательности пары

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

выполнено следующее:

- при $n \geq 1$ отображения $i_n: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ являются гомоморфизмами групп и $i_n(\alpha \cdot a) = i_1(\alpha) \cdot i_n(a)$ для $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, $a \in \pi_n(A, x_0)$;
- при $n \geq 2$ отображения $j_n: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$ являются гомоморфизмами групп и $j_n(i_1(\alpha) \cdot x) = \alpha \cdot j_n(x)$ для $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, $x \in \pi_n(X, x_0)$;
- при $n \geq 2$ отображения $\partial_n: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ являются гомоморфизмами и $\partial_n(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \partial_n(y)$ для $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, $y \in \pi_n(X, A, x_0)$;
- $j_1: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, A, x_0)$ удовлетворяет $j_1(\omega x) = \omega \cdot j_1(x)$ для $\omega \in \pi_1(X, x_0)$, $x \in \pi_1(X, x_0)$ (здесь ωx — умножение в $\pi_1(X, x_0)$, а не действие $\pi_1(X, x_0)$ на себе сопряжением!);
- прообразы элементов множества $\pi_0(A, x_0)$ при отображении ∂_1 совпадают с орбитами действия $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_1(X, A, x_0)$.

б)* Докажите также, что имеет место равенство $\partial_2(\alpha) \cdot \beta = \alpha \beta \alpha^{-1}$ для $\alpha, \beta \in \pi_2(X, A, x_0)$.

в)* Для произвольного расслоения Гуревича $F \rightarrow E \rightarrow B$ (с линейно связной базой) определите действие $\pi_1(E, e_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$, $n \geq 1$, расширяющее с помощью $i: F \hookrightarrow E$ действие $\pi_1(F, e_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$, то есть, такое, что $i_*(\phi) \cdot f = \phi \cdot f$ для $\phi \in \pi_1(F, e_0)$, $f \in \pi_n(F, e_0)$ (в частности, получаем, что если E — стягиваемо, то все действия $\pi_1(F, e_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$ — тривиальны). Напомним (см. задачу 11 листочка 1), что мы также имеем действие монодромии $\pi_1(B, b_0) \curvearrowright \pi_0(F)$ (так как монодромия не сохраняет отмеченные точки, мы, вообще говоря, не можем определить действия $\pi_1(B, b_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$ для $n \geq 1$). Для этих действий докажите аналогичные свойства длинной точной последовательности расслоения (обобщая случай «расслоения» $P(X, A, x_0) \rightarrow A \rightarrow X$).

4. Рассмотрим коммутативную диаграмму групп (здесь « Y/X » — просто обозначение для некоторых групп, а не какая-то факторконструкция)

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{j_1} & (X/A)_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & (A/B)_n & \xrightarrow{\partial_2} & B_{n-1} & \xrightarrow{i_3} & X_{n-1} & \xrightarrow{j_1} & \cdots \\ & \searrow j_3 & \nearrow j & \searrow \partial_1 & \nearrow j_2 & \searrow i & \nearrow \partial_3 & \searrow i_2 & \nearrow i_1 & \searrow j_3 & \nearrow j \\ \cdots & & (X/B)_{n+1} & & A_n & & (X/B)_n & & A_{n-1} & & (X/B)_{n-1} & \cdots \\ & \nearrow i & \searrow \partial_3 & \nearrow i_2 & \searrow i_1 & \nearrow j_3 & \searrow j & \nearrow \partial_1 & \searrow j_2 & \nearrow i & \searrow \partial_3 & \\ \cdots & & B_n & \xrightarrow{i_3} & X_n & \xrightarrow{j_1} & (X/A)_n & \xrightarrow{\partial} & (A/B)_{n-1} & \xrightarrow{\partial_2} & \cdots \end{array}$$

«сплетённую» из трёх последовательностей

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow (X/A)_{n+1} \xrightarrow{\partial_1} A_n \xrightarrow{i_1} X_n \xrightarrow{j_1} (X/A)_n \xrightarrow{\partial_1} A_{n-1} \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow (A/B)_{n+1} \xrightarrow{\partial_2} B_n \xrightarrow{i_2} A_n \xrightarrow{j_2} (A/B)_n \xrightarrow{\partial_2} B_{n-1} \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow (X/B)_{n+1} \xrightarrow{\partial_3} B_n \xrightarrow{i_3} X_n \xrightarrow{j_3} (X/B)_n \xrightarrow{\partial_3} B_{n-1} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

и последовательности

$$(\star) \quad \cdots \rightarrow (X/A)_{n+1} \xrightarrow{\partial} (A/B)_n \xrightarrow{i} (X/B)_n \xrightarrow{j} (X/A)_n \xrightarrow{\partial} (A/B)_{n-1} \rightarrow \cdots$$

Докажите, что если красная, синяя и зелёная последовательности точны, а также в последовательности $(\star)$ выполнено $j \circ i = 0$, то последовательность $(\star)$ также точна.

Выведите отсюда гомотопическую длинную точную последовательность тройки (проверьте, что в её конце, где возникают не группы, а множества с отмеченными точками, тоже никаких проблем с точностью не возникает ввиду наличия действий фундаментальных групп из предыдущей задачи).

$$\pi_n(CX, X) \xrightarrow[\cong]{\partial} \pi_{n-1}(X)$$

5. Убедитесь, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(CX, X) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \pi_{n-1}(X) \\ & \searrow & \downarrow \Sigma \\ & & \pi_n(\Sigma X) \end{array}$$

коммутативна (здесь CX — конус

над X , а ∂ — гомоморфизм из гомотопической длинной точной последовательности пары (CX, X)).

6. Проверьте, что $\pi_3(D^2, S^1) = 0$ в отличие от $\pi_3(D^2/S^1) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Аналогично представьте сферу S^2 в виде объединения двух полусфер $S^2 = D_+^2 \cup D_-^2$ и проверьте, что $\pi_3(S^2, D_+^2) = \mathbb{Z}$, а $\pi_3(D_-^2, D_+^2 \cap D_-^2) = 0$. Эти примеры показывают необходимость ограничения на размерности в теореме о гомотопическом вырезании.

7. а) Проверьте, что $f: X \rightarrow Y$ является n -эквивалентностью $\iff$ для любого клеточного пространства Z размерности $< n$ индуцированное отображение $f_*: [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ является биекцией, а для любого клеточного пространства Z размерности n — сюръекцией (заметьте, что тут непунктированные классы гомотопии, а в определении гомотопических групп — пунктированные) $\iff$ то же, но для пунктированных гомотопий.

В частности, отображение $f: X \rightarrow Y$ является слабой эквивалентностью $\iff$ для любого клеточного пространства Z индуцированное отображение $[Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$ биективно.

б) Выведите из пункта а), что если отображение n -мерных клеточных пространств индуцирует изоморфизм на π_i , $i \leq n$, то оно является гомотопической эквивалентностью.

В частности, если n -мерное клеточное пространство является n -связным, то оно стягиваемо.

в) Выведите из пункта а) обобщение теоремы Фрейден탈ля: для любого клеточного пространства Z и n -связного пространства X отображение надстройки $\Sigma: [Z, X]_\bullet \rightarrow [\Sigma_\bullet Z, \Sigma_\bullet X]_\bullet$ биективно при $\dim Z < 2n + 1$ и сюръективно при $\dim Z = 2n + 1$.

В частности, гомоморфизмы $\Sigma: [\Sigma_\bullet^N Z, \Sigma_\bullet^N X]_\bullet \rightarrow [\Sigma_\bullet^{N+1} Z, \Sigma_\bullet^{N+1} X]_\bullet$ становятся эпиморфизмами при $N \geq \dim Z - 2n - 1$ и изоморфизмами при $N > \dim Z - 2n - 1$.

г)* Докажите, что два пространства X и Y слабо эквивалентны $\iff$ функторы $h_X(Z) = [Z, X]$ и $h_Y(Z) = [Z, Y]$ из категории клеточных пространств в категорию множеств естественно изоморфны.

д)* Приведите пример слабой эквивалентности $f: X \rightarrow Y$ и клеточного пространства Z , таких что индуцированное отображение $f_*: [Y, Z] \rightarrow [X, Z]$ не биективно.

8. а) Докажите, что если клеточная пара (X, A) является n -связной, то существует клеточное пространство Z , получающееся из A приклеиванием клеток размерности $\geq n + 1$, и такое, что пара (Z, A) гомотопически эквивалентна паре (X, A) , причём все гомотопии неподвижны на A .

б) Пусть даны CW -аппроксимации $Q(X) \rightarrow X$ и $Q(Y) \rightarrow Y$. Докажите, что для любого отображения $X \rightarrow Y$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение

$$Q(X) \rightarrow Q(Y), \text{ превращающее диаграмму } \begin{array}{ccc} Q(X) & \longrightarrow & Q(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \text{ в коммутативную с точностью до гомотопии.}$$

Выведите, что CW -аппроксимация единственна с точностью до гомотопической эквивалентности.

в) Пусть для пары (X, A) выбрана некоторая CW -аппроксимация подпространства $\phi: Q(A) \rightarrow A$. Докажите, что тогда существует CW -аппроксимация $\Phi: Q(X) \rightarrow X$, такая что $Q(A) \subset Q(X)$ — клеточное подпространство и $\Phi|_{Q(A)} = \phi$.

Аналогично проверьте, что для другой пары (Y, B) , её аналогичной CW -аппроксимации $(Q(Y), Q(B)) \rightarrow (Y, B)$ и любого отображения пар $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $(Q(X), Q(A)) \rightarrow (Q(Y), Q(B))$, превращающее

$$\begin{array}{ccc} & (Q(X), Q(A)) \longrightarrow (Q(Y), Q(B)) & \\ \text{диаграмму} & \downarrow & \downarrow \\ & (X, A) \longrightarrow (Y, B) & \end{array} \quad \text{в коммутативную с точностью до гомотопии.}$$

Покажите, что если пара (X, A) является n -связной, то можно выбрать такую CW -аппроксимацию $(Q(X), Q(A))$, что $Q(X)$ получается из $Q(A)$ с помощью приклеивания клеток размерности $\geq n + 1$ (то есть, $Q(A) = Q(X)^n - n$ -остов).

г)* Пусть пространство X покрывается внутренностями своих подпространств A и B : $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. Обозначим $C = A \cap B$. Докажите, что тогда существует клеточное пространство $Q(X)$, представляемое в виде объединения двух своих клеточных подпространств $Q(A)$ и $Q(B)$, и отображение $\phi: (Q(X); Q(A), Q(B)) \rightarrow (X; A, B)$, такое что ограничения $\phi: Q(X) \rightarrow X$, $\phi: Q(A) \rightarrow A$, $\phi: Q(B) \rightarrow B$ и $\phi: Q(A) \cap Q(B) \rightarrow C$ являются CW -аппроксимациями.

Причём, если пара (A, C) является n -связной, то можно выбрать такие CW -аппроксимации, что $Q(A)$ получается из $Q(A) \cap Q(B)$ с помощью приклеивания клеток размерности $\geq n + 1$ (и аналогично для (B, C)).

Кроме того, эта конструкция также функториальна с точностью до гомотопии, аналогично пунктам а) и б).

9. а) Докажите, что пространства X и Y слабо эквивалентны (см. пункт б) задачи 11 первого листочка) $\iff$ они связаны «зигзагом длины 2» $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ из слабых эквивалентностей.

б)* Приведите пример такой слабой эквивалентности $X \rightarrow Y$, что не существует слабой эквивалентности $Y \rightarrow X$.

10. а) Докажите, что для любого целого числа $n \geq 0$ и группы π (абелевой, если $n \geq 2$, и просто множества, если $n = 0$) существует клеточное пространство X , имеющее единственную ненулевую гомотопическую группу $\pi_n(X) = \pi$.

б) Докажите, что такое клеточное пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.

Пространства с единственной ненулевой n -й гомотопической группой равной π называются *пространствами Эйленберга–Маклейна типа $K(\pi, n)$* .

в) Докажите, что пространства S^1 , $\mathbb{R}P^\infty$, $\mathbb{C}P^\infty$, а также бутылка Клейна являются пространствами Эйленберга–Маклейна. Убедитесь, что если X — пространство Эйленберга–Маклейна типа $K(\pi, n)$, то ΩX — пространство Эйленберга–Маклейна типа $K(\pi, n - 1)$.

г)* Докажите, что все замкнутые двумерные поверхности, за исключением S^2 и $\mathbb{R}P^2$, являются пространствами Эйленберга–Маклейна.

д) Докажите, что если n -мерное клеточное пространство X имеет $\pi_i(X) = 0$ при $2 \leq i \leq n$, то X является пространством типа $K(\pi_1(X), 1)$.

е) Докажите, что если X — $(n - 1)$ -связное клеточное пространство ($n \geq 1$), а пространство Y линейно связно и $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$, то естественное отображение $[X, Y]_\bullet \rightarrow \text{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$, $f \mapsto f_*$ является биекцией. В частности, если X — типа $K(\pi, n)$, а $Y = K(G, n)$, то $[X, Y]_\bullet \cong \text{Hom}(\pi, G)$. Чему в терминах групп π и G соответствует множество непунктированных гомотопических классов $[X, Y]$?

11. а) Пусть на множестве M есть две бинарные операции: $\circ$ и $\star$. Предположим, что эти операции обладают двусторонними единицами, $1_\circ$ и $1_\star$ соответственно, и «коммутируют друг с другом», то есть, выполнено $(a \star b) \circ (c \star d) = (a \circ b) \star (c \circ d)$.

Докажите, что тогда эти две операции совпадают (в частности, $1_\circ = 1_\star$), ассоциативны и коммутативны. (Это явление носит название *аргумент Экманна–Хилтона*)

б) Докажите с помощью пункта а), что при $n \geq 2$ умножения на π_n , определяемые с помощью разных координат (на кубах), совпадают (и, кроме того, ассоциативны и коммутативны). Аналогично для относительных π_n при $n \geq 3$.

в)* Докажите с помощью пункта а), что для (пунктированного) H -пространства X (то есть, пространства с отмеченной точкой x_0 и (пунктированным) отображением $\mu: X \times X \rightarrow X$ такими, что композиции $X = X \times \{x_0\} \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{\mu} X$ и $X = \{x_0\} \times X \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{\mu} X$ (пунктировано) гомотопны id_X) операция $\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) = \pi_n(X \times X, (x_0, x_0)) \xrightarrow{\mu_*} \pi_n(X, x_0)$ совпадает с умножением в гомотопической группе (а также всегда коммутативна и ассоциативна, в частности, $\pi_1(X, x_0)$ — коммутативна).

Применяя это к H -пространству петель ΩX , мы опять получаем коммутативность высших гомотопических групп и независимость операции от выбранной координаты.

г)* Докажите, что вообще на множестве $[S^n, X]_\bullet$, $n \geq 2$ существует только одна естественная по X структура группы. В свою очередь, покажите, что на множестве $[S^1, X]_\bullet$ существует ровно две естественные групповые структуры: стандартное умножение $u \cdot v$ и умножение «в обратном порядке» $u \star v := v \cdot u$.

12. Рассмотрим отражение $R: S^n \rightarrow S^n$ сферы относительно какой-нибудь гиперплоскости, проходящей через её центр. Докажите, что гомотопический класс $[R]$ представляет $-\iota_n$ в гомотопической группе $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ с образующей $[\text{id}] = \iota_n$.

13. Для клеточного пространства X сравните стандартное действие $\pi_1(X, x_0)$ на гомотопических группах $\pi_n(X, x_0)$ со следующими действиями:

а) Рассмотрим универсальное накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$. Оно индуцирует изоморфизмы $\pi_n(\tilde{X}) \cong \pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$ (здесь можно не писать отмеченную точку $\tilde{X}$, так как согласно пункту б) задачи 2 для односвязных пространств фундаментальные группы в различных точках канонически изоморфны). Вспомните, как фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ отождествляется с группой $\text{Aut}_X(\tilde{X})$ автоморфизмов универсального накрытия. Таким образом, мы получаем действие $\pi_1(X, x_0) \cong \text{Aut}_X(\tilde{X}) \curvearrowright \tilde{X}$, и следовательно, индуцированное действие $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_n(\tilde{X}) \cong \pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$ (заметим, что действие $\text{Aut}_X(\tilde{X}) \curvearrowright \tilde{X}$, очевидно, не сохраняет никаких отмеченных точек, однако, опять же в силу того, что $\tilde{X}$ односвязно, всё корректно).

б) Рассмотрим расслоение путей $P(X, x_0) = \{\gamma: I \rightarrow X \mid \gamma(0) = x_0\} \xrightarrow{\gamma(1)} X$. Это расслоение Гуревича со слоем ΩX над x_0 . Согласно задаче 11 из листочка 1 мы имеем корректное действие монодромии $\pi_1(X, x_0) \rightarrow [\Omega X, \Omega X]$ (которое тоже, конечно, не сохраняет отмеченных точек). В силу естественной биекции $[X, \Omega Y]_\bullet \cong [\Sigma_\bullet X, Y]_\bullet$ мы получаем, что $\pi_n(\Omega X, c_{x_0}) \cong \pi_{n+1}(X, x_0)$. Но действие $\pi_1(\Omega X, c_{x_0}) \curvearrowright \pi_n(\Omega X, c_{x_0})$ тривиально (в силу пункта в задачи 3, так как $P(X, x_0)$ в расслоении путей стягиваемо, либо в силу пункта в) задачи 15 ниже, так как ΩX является H -пространством относительно умножения петель). Следовательно, согласно пункту б) задачи 2 мы можем не обращать внимания на отмеченные точки в пространстве петель, и тогда монодромия корректно индуцирует действие $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X, x_0)$.

в) Согласно задаче 9 первого листочка отображение $C(S^n, X) \rightarrow X$, вычисляющее значение в точке $s_0 \in S^n$, является расслоением Гуревича (так как вложение точки $\{s_0\} \hookrightarrow S^n$ — корасслоение). Его слоем является пространством $C_\bullet(S^n, X)$ пунктированных отображений, и мы получаем действие монодромии $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_0(C_\bullet(S^n, X)) = \pi_n(X, x_0)$.

г)* Согласно пункту а) задачи 8 седьмого листочка по топологии-1 для любого пространства X , для которого вложение отмеченной точки — корасслоение, и любого пространства Y мы имеем действие $\pi_1(Y, y_0) \curvearrowright [X, Y]_\bullet$. В частности, для $X = S^n$ получаем $\pi_1(Y, y_0) \curvearrowright \pi_n(Y, y_0)$.

д) Рассмотрим следующий относительный вариант пункта а). Пусть $A \subset X$ — клеточное подпространство, причём вложение индуцирует изоморфизм $\pi_1(A) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$. Убедитесь, что тогда $\tilde{A} = p^{-1}(A) \subset \tilde{X}$ — универсальное накрытие над A , p индуцирует изоморфизмы $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{A}) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X, A, x_0)$ (причём группы $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{A})$ не зависят от отмеченной точки) и мы получаем действие группы $\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$ на паре $(\tilde{X}, \tilde{A})$, а значит, и на группах $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{A}) \cong \pi_n(X, A, x_0)$. Сравните это действие со стандартным действием $\pi_1(A, x_0) \curvearrowright \pi_n(X, A, x_0)$.

14. Вычислите действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$ для

а) $X = \mathbb{R}P^n$

б) $X = S^1 \vee S^n$

15. а) Рассмотрим на сферах S^k и S^l ($k, l \geq 1$) минимальные клеточные структуры из двух клеток и индуцированную клеточную структуру из четырёх клеток на произведении $S^k \times S^l$. Рассмотрим приклеивающее отображение для клетки старшей размерности $w: S^{k+l-1} \rightarrow S^k \vee S^l$.

Убедитесь, что явно это приклеивающее отображение имеет вид

$$S^{k+l-1} = \partial(D^k \times D^l) = S^{l-1} \times D^k \cup_{S^{k-1} \times S^{l-1}} D^l \times S^{k-1} \rightarrow S^k \vee S^l,$$

где последнее отображение составлено из двух отображений $S^{l-1} \times D^k \rightarrow D^k \rightarrow D^k/S^{k-1} = S^k \hookrightarrow S^k \vee S^l$ и $S^{k-1} \times D^l \rightarrow D^l \rightarrow D^l/S^{l-1} = S^l \hookrightarrow S^k \vee S^l$ и схлопывает пересечение $S^{k-1} \times S^{l-1}$ в точку.

Тогда *произведением Уайтхеда* двух сфероидов $f: S^k \rightarrow X$ и $S^l \rightarrow X$ называется сфероид $S^{k+l-1} \xrightarrow{w} S^k \vee S^l \xrightarrow{f \vee g} X$.

Проверьте, что таким образом мы получаем корректное отображение

$$\pi_k(X, x_0) \times \pi_l(X, x_0) \xrightarrow{[-, -]} \pi_{k+l-1}(X, x_0)$$

б) Докажите, что при $k = l = 1$ произведение Уайтхеда совпадает с коммутатором петель в фундаментальной группе: $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Более общо, докажите, что при $k = 1$ произведение Уайтхеда связано с действием фундаментальной группы на высших гомотопических группах следующим образом: $[\alpha, f] = \alpha \cdot f - f$.

в) Убедитесь, что $[f, g] = 0$ тогда и только тогда, когда отображение $S^k \vee S^l \xrightarrow{f \vee g} X$ продолжается до отображения $S^k \times S^l \rightarrow X$.

Выведите, что если X является H -пространством (см. пункт в) задачи 11), то все произведения Уайтхеда в гомотопических группах пространства X равны нулю.

В частности, из предыдущего пункта следует, что все действия фундаментальной группы на гомотопических группах в этом случае тривиальны.

г)* Докажите, что при гомоморфизме надстройки $\Sigma: \pi_{k+l-1}(X, x_0) \rightarrow \pi_{k+l}(X, x_0)$ все произведения Уайтхеда переходят в ноль.

д)* Докажите, что произведение Уайтхеда градуированно кососимметрично: $[f, g] = (-1)^{kl}[g, f]$ (при $k, l > 1$).

е)* Докажите, что произведение Уайтхеда билинейно: $[f, g + h] = [f, g] + [f, h]$ (при $l > 1$) и $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$ (при $k > 1$).

На самом деле, оно ещё удовлетворяет градуированному тождеству Якоби и задаёт на гомотопических группах структуру градуированного кольца Ли.

16.* Докажите, что для образующих $\iota_2 \in \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ (класс тождественного отображения) и $\eta \in \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (класс отображения Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$) выполнено равенство $[\iota_2, \iota_2] = 2\eta$.

В частности, из пункта г) задачи 15 получаем, что $2\eta \in \ker(\Sigma: \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_4(S^3))$, и следовательно, первая стабильная гомотопическая группа сфер $\pi_1^s = \pi_4(S^3)$ равна 0 или $\mathbb{Z}/2$.

Согласно «трудной части теоремы Фрейденшталя» ядро сюръективного гомоморфизма надстройки $\Sigma: \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \pi_{2n}(S^{n+1})$ всегда является циклической группой, порождённой скобкой Уайтхеда $[\iota_n, \iota_n]$ (в частности, $\pi_1^s \cong \mathbb{Z}/2$). Эта скобка равна нулю при $n = 1, 3, 7$ (в силу пункта в) задачи 15, так как в этом случае S^n является H -пространством из умножения на комплексных числах, кватернионах и октавах), имеет порядок 2 при остальных нечётных n (согласно пункту д) задачи 15 $2[\iota_n, \iota_n] = 0$ при нечётных n , то, что $[\iota_n, \iota_n] \neq 0$ при $n \neq 1, 3, 7$ требует отдельного доказательства) и имеет бесконечный порядок для чётных n (существует гомоморфизм $H: \pi_{4k-1}(S^{2k}) \rightarrow \mathbb{Z}$, называемый *инвариантом Хопфа*, переводящий $[\iota_{2k}, \iota_{2k}]$ в $2 \in \mathbb{Z}$).

17. Для простоты в этой задаче все пространства предполагаются клеточными.

а) Докажите, что для любого связного клеточного пространства X и любого $n \geq 1$ существуют клеточное пространство $\tau_{\leq n}X$ и отображение $\tau_{\leq n}: X \rightarrow \tau_{\leq n}X$, такие что:

- (1) $(\tau_{\leq n})_*: \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(\tau_{\leq n}X)$ — изоморфизмы при $i \leq n$
- (2) $\pi_i(\tau_{\leq n}X) = 0$ при $i > n$.

Говорят, что пространство $\tau_{\leq n}X$ получено из X «заклеиванием» всех гомотопических групп старше n -ой.

Докажите, что такое пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности, а отображение — с точностью до гомотопии, и выполнены следующие свойства:

(3) для клеточного пространства Y , такого что $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$ и любого отображения $f: X \rightarrow Y$, существует единственное с точностью до гомотопии отображение $\tau_{\leq n}X \rightarrow Y$,

замыкающее коммутативную (с точностью до гомотопии) диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau_{\leq n}} & \tau_{\leq n}X \\ & \searrow f & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

(4) для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ такого, что гомоморфизмы $f_*: \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ являются изоморфизмами при $i \leq n$, существует (единственное с точностью до гомотопии)

отображение $Y \rightarrow \tau_{\leq n}X$, замыкающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau_{\leq n}} & \tau_{\leq n}X \\ & \searrow f & \uparrow \\ & & Y \end{array},$$

коммутативную с точностью до гомотопии;

(5) каждое отображение $X \rightarrow Y$ (единственным образом с точностью до гомотопии)

включается в (гомотопически) коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tau_{\leq n}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \tau_{\leq n}Y \end{array}$$

Проверьте, что построенные отображения можно (единственным образом с точностью до гомотопии) включить в (гомотопически) коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow p_3 \\ \tau_{\leq 3}X \\ \downarrow p_2 \\ \tau_{\leq 2}X \\ \downarrow p_1 \\ \tau_{\leq 1}X \\ \uparrow \tau_{\leq 1} \\ X \end{array}$$

Эта конструкция называется *башней Постникова* пространства X .

Убедитесь, что пространства $\tau_{\leq n}X$ можно заменить на гомотопически эквивалентные, чтобы добиться ещё и того, чтобы в (по-прежнему гомотопически коммутативной) диаграмме выше отображения $p_n: \tau_{\leq n+1}X \rightarrow \tau_{\leq n}X$ были расслоениями Гуревича. Проверьте, что в таком случае слои отображения p_n являются пространствами типа $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$.

б)* Аналогично докажите, что для любого связного клеточного пространства X и любого $n \geq 2$ существуют клеточное пространство $\tau_{\geq n}X$ и отображение $\tau_{\geq n}: \tau_{\geq n}X \rightarrow X$, такие что:

- (1) $(\tau_{\geq n})_*: \pi_i(\tau_{\geq n}X) \rightarrow \pi_i(X)$ — изоморфизмы при $i \geq n$
- (2) $\pi_i(\tau_{\geq n}X) = 0$ при $i < n$.

Говорят, что пространство $\tau_{\geq n+1}X$ получено из X «убиванием» всех гомотопических групп до n -ой.

Докажите, что такое пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности, а отображение — с точностью до гомотопии, и выполнены следующие свойства:

(3) для любого клеточного пространства Y , такого что $\pi_{i < n}(Y) = 0$, и отображения $f: Y \rightarrow X$ существует отображение $Y \rightarrow \tau_{\geq n}X$, замыкающее коммутативную с точностью

до гомотопии диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\geq n}X & \xrightarrow{\tau_{\geq n}} & X \\ f \uparrow & \nearrow & \\ Y & & \end{array}, \text{ причём если } \pi_i(Y) = 0 \text{ при } i < n+1, \text{ то такое}$$

замыкающее отображение $Y \rightarrow \tau_{\geq n}X$ единственно с точностью до гомотопии;

(4) для любого отображения $f: Y \rightarrow X$ из клеточного пространства Y такого, что гомоморфизмы $f_*: \pi_i(Y) \rightarrow \pi_i(X)$ являются изоморфизмами при $i \geq n$, существует (единственное с точностью до гомотопии) отображение $\tau_{\geq n}X \rightarrow Y$, замыкающее коммутативную с точно-

стью до гомотопии диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\geq n}X & \xrightarrow{\tau_{\geq n}} & X \\ & \searrow & \uparrow \\ & & Y \end{array}$$

(5) каждое отображение $X \rightarrow Y$ (единственным образом с точностью до гомотопии)

включается в (гомотопически) коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\geq n}X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\geq n}Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Убедитесь, что построенные отображения можно (единственным образом с точностью до гомотопии) включить в коммутативную (с точностью до гомотопии) диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \downarrow q_4 & & \\ \tau_{\geq 4}X & & \\ \downarrow q_3 & \searrow \tau_{\geq 4} & \\ \tau_{\geq 3}X & & \\ \downarrow q_2 & \searrow \tau_{\geq 3} & \\ \tau_{\geq 2}X & \xrightarrow{\tau_{\geq 2}} & X \end{array}$$

Пространства $\tau_{\geq n+1}X$ называются n -связными накрытиями пространства X . Они обобщают (в случае клеточного X) универсальное (1-связное) накрытие. Например, расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$ из 3 задачи первого листочка является 2-связным накрытием сферы S^2 .

Проверьте, что диаграмму выше можно заменить на гомотопически эквивалентную так, чтобы отображения $q_n: \tau_{\geq n+1}X \rightarrow \tau_{\geq n}X$ были расслоениями Гуревича. Убедитесь, что в таком случае слои отображения q_n являются пространствами типа $K(\pi_n(X), n-1)$.

в)* Докажите, что:

- (1) $\tau_{\leq n} \tau_{\leq n+m} X \simeq \tau_{\leq n} X$;
- (2) $\tau_{\geq n+m} \tau_{\geq n} X \simeq \tau_{\geq n+m} X$;
- (3) $\tau_{\geq n} \tau_{\leq n+m} X \simeq \tau_{\leq n+m} \tau_{\geq n} X$;
- (4) имеется слабая эквивалентность $\tau_{\geq n} X \rightarrow \text{hofib}(X \rightarrow \tau_{\leq n-1} X)$.

То есть, с точностью до (слабой) гомотопической эквивалентности мы имеем расслоение $\tau_{\geq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau_{\leq n-1} X$. Например, мы получаем $S^3 \simeq \text{hofib}(S^2 = \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty)$ и $\tilde{X} \simeq \text{hofib}(X \rightarrow \tau_{\leq 1} X = K(\pi_1(X), 1))$.

г)* Обобщая предыдущие два пункта, докажите, что для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ между связными клеточными пространствами существует (единственное с точностью до гомотопии) разложение $X \xrightarrow{\tau_{<n}} \tau_n(f) \xrightarrow{\tau_{>n}} Y$, такое что

- (1) $(\tau_{<n})_*: \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(\tau_n(f))$ — изоморфизмы при $i < n$ и эпиморфизм при $i = n$ (то есть, отображение $\tau_{<n}$ — n -связно);
- (2) $(\tau_{>n})_*: \pi_i(\tau_n(f)) \rightarrow \pi_i(Y)$ — изоморфизмы при $i > n$ и мономорфизм при $i = n$ (то есть, отображение $\tau_{>n}$ — n -косвязно);
- (3) композиция $\tau_{>n} \circ \tau_{<n}$ гомотопна f .

Причём, если есть другое разложение $X \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} Y$, такое что композиция $(ba)_*: \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ равна f_* при $i \geq n$ и $b_*: \pi_i(Z) \rightarrow \pi_i(Y)$ является мономорфизмом при $i \geq n$, то существует отображение $\tau_n(f) \rightarrow Z$, замыкающее коммутативную с точностью до гомотопии

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\tau_{<n}} & \tau_n(f) & \xrightarrow{\tau_{>n}} & Y \\ & \searrow a & \downarrow & \nearrow b & \\ & & Z & & \end{array}, \text{ а если } b_*: \pi_i(Z) \rightarrow \pi_i(Y) \text{ — ещё и изоморфизмы при}$$

$i > n$, то такое отображение $\tau_n(f) \rightarrow Z$ единственно с точностью до гомотопии.

Аналогично, если есть другое разложение $X \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} Y$, такое что композиция ba гомотопна f , и отображение a является n -связным, то существует (единственное с точностью до гомотопии) отображение $Z \rightarrow \tau_n(f)$, замыкающее коммутативную с точностью до гомотопии

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\tau_{<n}} & \tau_n(f) & \xrightarrow{\tau_{>n}} & Y \\ & \searrow a & \uparrow & \nearrow b & \\ & & Z & & \end{array}.$$

Наконец, все эти отображения опять же можно сложить (единственным с точностью до гомотопии образом) в коммутативную с точностью до гомотопии диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \downarrow \pi_2 & \\ & \tau_2(f) & \\ \tau_{<2} \nearrow & \downarrow \pi_1 & \searrow \tau_{>2} \\ & \tau_1(f) & \\ \tau_{<1} \nearrow & & \searrow \tau_{>1} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(называемую иногда *башней Уайтхеда* отображения f).

Проверьте при этом, что если заменить отображения π_i на расслоения, то слоем π_n будет пространство типа $K(\pi_n(\text{hofib}(f)), n)$.

18. Для расслоения Гуревича $p: E \rightarrow B$ и подпространства $A \subset B$ докажите, что p индуцирует изоморфизмы $\pi_n(E, p^{-1}(A)) \rightarrow \pi_n(B, A)$.

19. Докажите, что для любого клеточного пространства X «бесконечная надстройка» $\Sigma^\infty X := \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k X$ (объединение возрастающей цепочки $X \subset \Sigma X \subset \Sigma^2 X \subset \dots$) стягиваема.

20. а)* Докажите, что (для линейно связного X) множества $\pi_{i \leq n}(X)$ конечны $\iff$ множества $[Z, X]$ конечны для всех клеточных Z с $\dim Z \leq n$.

б) Докажите, что связное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно клеточному пространству, у которого все остовы конечны $\iff$ группы $\pi_i(X)$ конечно порождены, а $\pi_1(X)$ — ещё и конечно представлена.

в)* Докажите, что связное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно счётному клеточному пространству $\iff$ все группы $\pi_i(X)$ счётны.

21.* Докажите, что для любой группы G и любой последовательности G -модулей $\{A_n\}_{n \geq 2}$ существует пространство X с $\pi_1(X) \cong G$ и $\pi_n(X) \cong A_n$ как G -модули.

22. а) Приведите пример склеек

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \cup_A Y \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & X' \cup_{A'} Y' \end{array}$$

и гомотопических

эквивалентностей $A \xrightarrow{\sim} A'$, $X \xrightarrow{\sim} X'$, $Y \xrightarrow{\sim} Y'$, таких что индуцированное отображение $X \cup_A Y \rightarrow X' \cup_{A'} Y'$ не является даже слабой эквивалентностью.

б)* Докажите однако, что если в условиях пункта а) одно из отображений $A \rightarrow X$ и $A \rightarrow Y$ и одно из отображений $A' \rightarrow X'$ и $A' \rightarrow Y'$ являются (замкнутыми) корасслоениями, то индуцированное отображение $X \cup_A Y \rightarrow X' \cup_{A'} Y'$ является гомотопической эквивалентностью.

в)* Аналогично, если одно из отображений $A \rightarrow X$ и $A \rightarrow Y$ и одно из отображений $A' \rightarrow X'$ и $A' \rightarrow Y'$ являются вложениями клеточных подпространств, а отображения $A \xrightarrow{\sim} A'$, $X \xrightarrow{\sim} X'$ и $Y \xrightarrow{\sim} Y'$ — слабыми эквивалентностями, то индуцированное отображение $X \cup_A Y \rightarrow X' \cup_{A'} Y'$ также является слабой эквивалентностью.

г) Приведите пример пуллбэков

$$\begin{array}{ccc} X \times_B Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & B \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} X' \times_{B'} Y' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

и гомотопических

эквивалентностей $B \xrightarrow{\sim} B'$, $X \xrightarrow{\sim} X'$, $Y \xrightarrow{\sim} Y'$, таких что индуцированное отображение $X \times_B Y \rightarrow X' \times_{B'} Y'$ не является слабой эквивалентностью.

д)* Докажите, что если (в условиях пункта г)) одно из отображений $X \rightarrow B$ и $Y \rightarrow B$ и одно из отображений $X' \rightarrow B'$ и $Y' \rightarrow B'$ являются расслоениями Гуревича, то индуцированное отображение $X \times_B Y \rightarrow X' \times_{B'} Y'$ является гомотопической эквивалентностью.

е)* Аналогично, если одно из отображений $X \rightarrow B$ и $Y \rightarrow B$ и одно из отображений $X' \rightarrow B'$ и $Y' \rightarrow B'$ являются расслоениями Серра, а отображения $B \rightarrow B'$, $X \rightarrow X'$ и $Y \rightarrow Y'$ — слабыми эквивалентностями, то индуцированное отображение $X \times_B Y \rightarrow X' \times_{B'} Y'$ является слабой эквивалентностью.

Эти примеры показывают, что хотя обычные (ко)пределы в категории топологических пространств не гомотопически инвариантны, при некоторых условиях они таковыми являются. Оказывается, любую диаграмму можно заменить на гомотопически эквивалентную так, чтобы её (ко)предел был гомотопически инвариантным. Это приводит к понятию *гомотопических (ко)пределов*.