

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 6.**  
**Векторные расслоения-I. 2.04.2025.**

**Задача 1.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  состоит из таких пар  $(l, v)$ , что если рассмотреть  $l \in \mathbb{R}P^n$  как прямую в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то  $v \in l$ . Пусть  $p : E \rightarrow \mathbb{R}P^n$  естественная проекция, индуцированная проекцией из прямого произведения  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  на первый сомножитель. Доказать, что  $E \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$  — гладкое векторное локально тривиальное расслоение ранга 1 и найти его склеивающие коциклы при выборе стандартных аффинных подмножеств  $\mathbb{R}P^n$  в качестве тривиализирующего покрытия. Это расслоение называется универсальным или тавтологическим расслоением над  $\mathbb{R}P^n$ .

**Задача 2.** Построить аналогично универсальное (или тавтологическое) расслоение над многообразием Грассмана  $G_k(\mathbb{R}^n)$  и найти его склеивающие коциклы.

**Задача 3.** Пусть  $\xi = (E, p, B)$  локально тривиальное расслоение,  $U_\alpha$  тривиализующие окрестности, а  $g_{\alpha\beta}$  соответствующие склеивающие коциклы. Рассмотрим расслоение  $f^*\xi$ , где  $f : M \rightarrow B$ . Докажите, что  $f^*g_{\alpha\beta}$ , определённые формулой

$$f^*g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x)),$$

задают склеивающие коциклы для  $f^*\xi$  для тривиализирующего покрытия множествами  $f^{-1}(U_\alpha)$ .

**Задача 4.** Пусть  $\xi$  векторное расслоение. Объясните, как строить склеивающие коциклы для расслоений  $\xi^*$ ,  $\xi \wedge \xi$ .

**Задача 5.** Для комплексного векторного расслоения  $\xi$  объясните, как строить коциклы для его о веществления  $r\xi$ , а для вещественного векторного расслоения  $\xi$  объясните, как строить коциклы для его комплексификации  $\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ .

**Задача 6.** Являются ли тривиальными касательные расслоения  $TS^1$ ,  $TS^2$ ,  $TS^3$ ?

**Задача 7.** Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение.

**Задача 8.** Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их произведение — тривиальное расслоение.

**Задача 9.** Найти (с точностью до изоморфизма) все одномерные вещественные расслоения над  $\mathbb{R}P^1$ .

*Указание: обратите внимание, что локальные базис в сечениях состоит из одного сечения. Если ввести метрику, то над каждой тривиализирующей окрестностью соответствующее сечение можно отнормировать. Тогда склеивающие коциклы устроены просто:  $g_{\alpha\beta}(x) \equiv \pm 1$ .*

**Задача 10.** Как связаны универсальное расслоение  $\gamma^1$  над  $\mathbb{R}P^1$  и лист Мёбиуса, расслоенный над окружностью?