

1. Заполнив таблицу умножения, классифицируйте все группы порядка 3 и 4.
2. а) Докажите, что если в группе любой элемент имеет порядок 2, то она абелева.
б) Пусть эта группа конечна. Не пользуясь теоремой о строении абелевых групп, докажите, что она изоморфна прямой сумме (или прямому произведению) групп $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Классифицируйте все группы порядка 6 и 10.
4. а) Задайте группу D_n образующими и соотношениями. б) Группа задана образующими и соотношениями $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2, a^4 = 1 \rangle$. Сколько в ней элементов?
5. а) Покажите, что группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}^*$ не являются конечно порождёнными. б) Докажите, что группу $\mathbb{Q}$ нельзя представить в виде нетривиального прямого произведения. в) Представьте группу $\mathbb{Q}^*$ в виде бесконечной прямой суммы циклических групп.
6. Для группы D_n найдите а) центр (т.е. множество элементов, коммутирующих со всеми элементами), б) все подгруппы, в) все нормальные подгруппы и факторы по ним.
7. а) Докажите, что группа D_4 не является прямой суммой своих нетривиальных подгрупп. б) Приведите пример группы D_n , являющейся прямой суммой своих нетривиальных подгрупп.
8. Пусть m и n – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что имеется изоморфизм $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Покажите, что это утверждение никогда не верно, если числа m и n не взаимно просты.
9. а) Сколько всего различных циклов длины k в S_n ? б) Найдите все типы разложения в независимые циклы в группе S_6 . в) Для каждого типа разложения найдите, сколько подстановок в S_6 имеют данный тип. г) Найдите все возможные числа, являющиеся порядками каких-нибудь элементов в S_{10} .
10. Докажите, что любую подстановку можно представить в виде произведения а) элементарных транспозиций вида $(i \ i+1)$, где $1 \leq i \leq n-1$; , б) $(1, n)$ и $(1, 2, 3, \dots, n)$.
11. Докажите, что группа внутренних автоморфизмов группы нормальна в группе всех автоморфизмов группы.
12. Вычислите группы автоморфизмов групп а) $\mathbb{Z}$, б) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, в) S_3 , г) S_4 .