ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОЧЕК 7: КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Докажите, что любое отображение $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$ индуцирует нулевое отображение на приведённых (ко)гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ при $n > m$.

2. Докажите, что сферу S^n нельзя разложить в нетривиальное произведение $X \times Y$.

3. Гомотопически эквивалентны ли пространства $\mathbb{R}P^{2n} \vee S^{n+1}$ и $\mathbb{R}P^{2n+1}$?

4. Вычислите кольцо когомологий факторпространства $\mathbb{C}P^\infty/\mathbb{C}P^1$.

5. Вычислите кольца когомологий $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$ и $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/m)$.

6. Докажите, что $\beta(x\cup y) = \beta(x)\cup y+(-1)^{|x|}x\cup\beta(y)$ для гомоморфизма Бокштейна $\beta\colon H^*(X;\mathbb{Z}/m) \to H^{*+1}(X;\mathbb{Z}/m)$ (см. задачу 23 листочка 6).

7. Докажите, что $H^*(\bigsqcup X_\alpha) = \prod H^*(X_\alpha)$ как кольца. Чему изоморфно кольцо $H^*(\bigvee X_\alpha)$?

8. Приведите пример пространств X и Y, таких что для поля $\mathbb{F}$ внешнее произведение $H^*(X;\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H^*(Y;\mathbb{F}) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y;\mathbb{F})$ не является изоморфизмом.

9. а) Докажите, что отображение Александера–Уитни $AW\colon C_*(X\times Y) \to C_*(X)\otimes C_*(Y)$, $AW(\sigma) = \sum \sigma_X|_{\leqslant i} \otimes \sigma_Y|_{\geqslant i}$ является морфизмом цепных комплексов.
б) Для симплексов $\Delta^p = \{0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_p \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^p$ и $\Delta^q = \{0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_q \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^q$ рассмотрим их произведение $\Delta^p \times \Delta^q = \{0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_p \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant x_{p+q} \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^{p+q}$.
Тогда для каждой тасующей перестановки $\tau \in Sh(p,q)$, $\tau(1) < \ldots < \tau(p)$, $\tau(p+1) < \ldots < \tau(p+q)$ определено аффинное вложение $s_\tau\colon \Delta^{p+q} \hookrightarrow \Delta^p\times\Delta^q$ симплекса Δ^{p+q} на подсимплекс $\Delta^{p+q}_\tau = \{0 \leqslant x_{\tau^{-1}(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\tau^{-1}(p+q)} \leqslant 1\} \subset \Delta^p\times\Delta^q$. Отображение Эйленберга–Зильбера тогда определяется как $EZ\colon C_*(X)\otimes C_*(Y) \to C_*(X\times Y)$, $EZ(\sigma^p_X \otimes \sigma^q_Y) = \sum\limits_{\tau\in Sh(p,q)} \operatorname{sgn}(\tau)(\sigma_X\times\sigma_Y)\circ(s_\tau)$.
Докажите, что отображение Эйленберга–Зильбера является морфизмом цепных комплексов.
в) Докажите, что $a\times b = (-1)^{|a||b|}t^*(b\times a)$, где $t\colon X\times Y \to Y\times X$, $t(x,y) = (y,x)$.
г) Рассмотрим композицию $C^*(X)\times C_*(X\times Y) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes AW} C^*(X)\otimes C_*(X)\otimes C_*(Y) \xrightarrow{\langle,\rangle\otimes\mathrm{id}} C_*(Y)$, где спаривание Кронекера $\langle\,,\rangle\colon C_*(X)\otimes C^*(X) \to \mathbb{Z}$, считается равным нулю на слагаемых $C_n(X)\otimes C^m(X)$ при $m\neq n$.
Проверьте, что эта композиция корректно определяет $\backslash$-*умножение* $H^n(X)\otimes H_m(X\times Y) \to H_{m-n}(Y)$. Оно обозначается $y\backslash a$ для $a\in H_m(X\times Y)$, $y\in H^n(X)$.
Убедитесь, что то же умножение для клеточных пространств можно определить с помощью отображения $C^n_{CW}(X)\otimes C^{CW}_m(X\times Y) \to C^{CW}_{m-n}(Y)$, $\phi\otimes(e_X\times e_Y) \mapsto \phi(e_X)e_Y$.
д) Композиция $H^n(X)\otimes H_m(X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta_*} H^n(X)\otimes H_m(X\times X) \xrightarrow{\backslash} H_{m-n}(X)$ называется $\cap$-произведением. В его обозначении удобно переставить аргументы местами: $a\cap x := x\backslash\Delta_*(a)$, $a\in H_m(X)$, $x\in H^n(X)$.
Убедитесь, что при $m = n$ (и связном X) мы получаем произведение Кронекера.

Докажите, что для отображения $f\colon X \to Y$ и элементов $a \in H_*(X)$, $x \in H^*(Y)$ имеет место формула $f_*(a \cap f^*(x)) = f_*(a) \cap x$.
Кроме того, для элементов $a \in H_*(X)$ и $x, y \in H^*(X)$ докажите, что имеет место формула $(a \cap x) \cap y = a \cap (x \cup y)$.
е)* Докажите равенство $(a \times b) \cap (x \times y) = (-1)^{|x||b|}(a \cap x) \times (b \cap y)$.

10. Докажите, что внешнее произведение $H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y;R)$ является гомоморфизмом R-алгебр (на тензорном произведении градуированных алгебр $A \otimes_R A$ структура алгебры задаётся по правилу $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (-1)^{|b||c|}(ac) \otimes (bd)$).

11. Вычислите кольца когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/2$ для всех замкнутых поверхностей (ориентируемых и нет).

12. Приведите пример двух пространств, у которых изоморфны кольца когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}/p$ (для всех простых p), но не изоморфны с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

13. *Категорией Люстерника–Шнирельмана* пространства X называется минимальное натуральное n, такое что существует открытое покрытие $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, причём все включения $U_i \hookrightarrow X$ гомотопны нулю. Обозначим это число $\mathrm{cat}_{LS}(X)$ (иногда по определению категорией называют число на единицу большее).
Докажите, что если $n \geqslant \mathrm{cat}_{LS}(X)$, то для любых $x_1, \ldots, x_n \in \widetilde{H}^*(X)$ выполнено $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 0$ в кольце $H^*(X)$.
В частности, умножение в $H^*(\Sigma X)$ «тривиально» (то есть, нулевое, если не считать единицу) для любой надстройки (так как надстройка представляется в виде объединения двух стягиваемых конусов).
Чему равно $\mathrm{cat}_{LS}(\mathbb{R}P^n)$?

14.* Докажите, что расщепление в теореме Кюннета неестественно.

15. Пусть для подпространств $A \subset X$, $B \subset Y$ выполнено свойство вырезания для объединения $A \times Y \cup X \times B \subset X \times Y$, то есть, естественное вложение $C_*(A \times Y) + C_*(X \times B) \hookrightarrow C_*(A \times Y \cup X \times B)$ является гомотопической эквивалентностью; например, это так, когда $A \times Y \cup X \times B$ является объединением внутренностей $\mathrm{Int}(A \times Y) \cup \mathrm{Int}(X \times B)$ (в топологии $A \times Y \cup X \times B$), в частности, когда одно из множеств A или B пусто, или когда все пространства клеточные.
а) Используя теорему Эйленберга–Зильбера о том, что AW и EZ являются естественными взаимообратными гомотопическими эквивалентностями (и гомотопии тоже естественны), проверьте, что имеет место естественная гомотопическая эквивалентность $C_*(X, A) \otimes C_*(Y, B) \simeq C_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$. Выведите, что определено относительное внешнее произведение $H_*(X, A) \otimes H_*(Y, B) \xrightarrow{\times} H_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$.
Аналогично выведите относительные версии для когомологий.
б)* Рассмотрим композицию $\partial_A\colon H_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \xrightarrow{\partial} H_{*-1}(A \times Y \cup X \times B) \cong H_{*-1}(A \times Y, A \times B)$ граничного отображения пары и изоморфизма вырезания. Аналогично определяется $\partial_B\colon H_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \to H_{*-1}(X \times B, A \times B)$.
Докажите формулы $\partial_A(a \times b) = \partial(a) \times b$ и $\partial_B(a \times b) = (-1)^a(a \times \partial b)$ (справа ∂ — граничные отображения пар (X, A) и (Y, B)).
Проделайте то же для когомологий и $\cup$-произведения.

в)* Докажите, что также существуют относительные произведения $H^n(X,A)\otimes H_m(X\times Y, A\times Y\cup X\times B)\xrightarrow{\backslash} H_{m-n}(Y,B)$ и $H_m(X,A\cup B)\otimes H^n(X,A)\xrightarrow{\cap} H_{m-n}(X,B)$.

Рассмотрим вложения $j_A\colon (A,A\cap B)\hookrightarrow (X,B)$ и $j_B\colon (B,A\cap B)\hookrightarrow (X,A)$, композицию $\partial_A\colon H_m(X,A\cup B)\to H_{m-1}(A\cup B,A)\cong H_{m-1}(A,A\cap B)$ граничного отображения тройки $(X,A\cup B,A)$ и вырезания, аналогичною композицию $\partial_B\colon H_m(X,A\cup B)\to H_{m-1}(B,A\cap B)$ и граничные отображения пар $\partial\colon H_*(X,B)\to H_{*-1}(B)$ и $\delta\colon H^*(A)\to H^{*+1}(X,A)$.
Тогда докажите формулы $\partial(z\cap x)=\partial_B z\cap j_B^*(x)$ (для $z\in H_m(X,A\cup B)$, $x\in H^n(X,A)$) и $z\cap\delta x=(-1)^{|x|+1}(j_A)_*(z\cap\partial_A x)$ (для $z\in H_m(X,A\cup B)$, $x\in H^n(A)$).

16. Для проекций $p_X\colon X\times Y\to X$ и $p_Y\colon X\times Y\to Y$ докажите равенство $p_X^*(x)\cup p_Y^*(y)=x\times y$ для всех $x\in H^*(X)$, $y\in H^*(Y)$.
Аналогично $x\backslash a=(-1)^{|a||x|}(p_Y)_*(a\cap p_X^*(x))$. То же для относительной ситуации.

17. Докажите, что для гомотопически ассоциативного и гомотопически коммутативного (пунктированного) H-пространства X с умножением $\mu\colon X\times X\to X$ (см. задачу 9 листочка 7 топологии-1) отображение $H_*(X;R)\otimes_R H_*(X;R)\xrightarrow{\times} H_*(X\times X;R)\xrightarrow{\mu_*} H_*(X;R)$ задаёт на гомологиях $H_*(X)$ структуру ассоциативной и градуированно коммутативной R-алгебры, называемой *алгеброй Понтрягина.*

18. а) *(Связной градуированной) коалгеброй* над коммутативным кольцом R называется прямая сумма R-модулей $C=\bigoplus_{n\geqslant 0}C_n$, такая что $C_0=R$ и задано (R-линейное) *коумножение* $\Delta\colon C\to C\otimes_R C$ (сохраняющее градуировку, то есть, $\Delta\colon C_n\to\bigoplus\limits_{p+q=n}C_p\otimes_R C_q$), удовлетворяющее свойству $\Delta(c)=1\otimes c+c\otimes 1+\sum c_i'\otimes c_i''$, $c_i',c_i''\in C_{>0}$ (здесь $1\in C_0=R$).
Коалгебра называется *коассоциативной*, если выполнено равенство $(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta=(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta$, и *(градуированно) кокоммутативной*, если $\mathrm{tw}\circ\Delta=\Delta$, где $\mathrm{tw}\colon C\otimes C\to C\otimes C$, $c_1\otimes c_2\mapsto(-1)^{|c_1||c_2|}c_2\otimes c_1$.
Докажите, что, если гомологии $H_i(X;R)$ являются плоскими модулями (например, свободными) и X связно, то на $H_*(X;R)$ существует естественная структура связной коассоциативной кокоммутативной коалгебры.
б) *(Связной градуированной) биалгеброй* над коммутативным кольцом R называется градуированный R-модуль $A=\bigoplus_{n\geqslant 0}A_n$ с $A_0=R$, снабжённый структурой градуированной коалгебры $\Delta\colon A\to A\otimes_R A$, а также градуированной алгебры $A\otimes_R A\xrightarrow{\cdot} A$ так, что коумножение $\Delta\colon A\to A\otimes_R A$ является гомоморфизмом алгебр.
Проверьте, что если X является (пунктированным) H-пространством с плоскими модулями гомологий $H_i(X;R)$, то $H_*(X;R)$ является коассоциативной кокоммутативной биалгеброй (ассоциативность и коммутативность которой зависит от соответствующих свойств умножения на X).
Аналогично, если X является (пунктированным) H-пространством со свободными и конечно порождёнными модулями когомологий $H^i(X;R)$, то $H^*(X;R)$ является ассоциативной коммутативной биалгеброй (коассоциативность и кокоммутативность которой зависит от соответствующих свойств умножения на X).
в) Для конечномерного свободного R-модуля M определим двойственный модуль $M^*:=\mathrm{Hom}_R(M,R)$ (он изоморфен M, но не естественно). Докажите, что существует естественный изоморфизм $(M\otimes_R N)^*\cong M^*\otimes_R N^*$. Выведите, что если в прямой сумме $M=R\oplus M_1\oplus M_2\oplus\cdots$ все модули M_i — свободные конечномерные,

то структуры коалгебры на M биективно соответствуют структурам алгебры на $M^* := R \oplus M_1^* \oplus M_2^* \oplus \cdots$ (и наоборот).
В частности для любой структуры биалгебры на M получается структура *двойственной биалгебры* на M^*.
Докажите, что для H-пространства X со свободными конечномерными гомологиями и когомологиями биалгебры $H_*(X;R)$ и $H^*(X;R)$ двойственны друг другу.

19. Докажите, что имеют место естественные изоморфизмы $H_i(X;G) \cong \widetilde{H}_{i+n}(X \wedge M(G,n);\mathbb{Z})$, где $M(G,n)$ — пространство Мура (см. задачу 6 листочка 6). Они обобщают изоморфизмы надстройки, так как $M(\mathbb{Z},n) = S^n$.

20.* Рассмотрим отображение коммутатора в пространстве петель $\Omega X \times \Omega X \xrightarrow{c} \Omega X$, $(\omega_1,\omega_2) \mapsto \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot (\overline{\omega}_1 \cdot \overline{\omega}_2))$.
Проверьте, что для отображений $f\colon S^{n-1} \to \Omega X$ и $g\colon S^{m-1} \to \Omega X$ композиция $S^{n-1} \times S^{m-1} \xrightarrow{f\times g} \Omega X \times \Omega X \xrightarrow{c} \Omega X$ с точностью до гомотопии пропускается через факторизацию $S^{n-1} \times S^{m-1} \to S^{n-1} \wedge S^{m-1}$, и следовательно, определяет отображение $S^{n+m-2} = S^{n-1} \wedge S^{m-1} \xrightarrow{c(f\wedge g)} \Omega X$. Перенося петли налево, получаем сфероид $\Sigma S^{n+m-2} = S^{n+m-1} \to X$, называемый *произведением Самельсона* $[f,g]_s \in \pi_{m+n-1}(X)$ отображений f и g.
Можно доказать, что произведение Самельсона с точностью до знака совпадает с произведением Уайтхеда (см. задачу 15 листочка 2).
Докажите, что гомоморфизм Гуревича $hur\colon \pi_{n+m-2}(\Omega X) \to H_{m+n-2}(\Omega X)$ для пространства петель переводит $c(f\wedge g) \in \pi_{n+m-2}(\Omega X)$ в градуированный коммутатор $hur([f])hur([g]) - (-1)^{(m-1)(n-1)}hur([g])hur([f])$ (умножение подразумевается в алгебре Понтрягина $H_*(\Omega X)$).

21.* Докажите, что для любого $x \in H^1(X;\mathbb{Z})$ выполнено $x \cup x = 0$.

22. Докажите, что нечётное отображение сферы в себя имеет нечётную степень.
Выведите, что для любого отображения $S^n \to \mathbb{R}^n$ существует такая точка $x \in S^n$, что $f(x) = f(-x)$.

23. Докажите, что если существует отображение $f\colon S^n \times S^n \to S^n$, нечётное по каждому аргументу, то есть, $f(-x,y) = -f(x,y) = f(x,-y)$, то n нечётно.

24.* Для пространства X рассмотрим отображение $[X,S^n] \to H^n(X;\mathbb{Z})$, $[f] \mapsto f^*([S^n])$, где $[S^n] \in H^n(S^n;\mathbb{Z})$ — образующая.
Докажите, что для n-мерного клеточного пространства это биекция.

25. Вычислите следующие кольца Понтрягина
а) $H_*(T^n;\mathbb{Z})$;
б) $H_*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$;
в)*$H_*(\mathbb{C}P^\infty);\mathbb{Z}$.
(Вспомните, как определяется умножение на $\mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{C}P^\infty$.)

26.* Вычислите кольца $H^*(K(\mathbb{Z}/m,1);\mathbb{Z}/m)$ и $H^*(K(\mathbb{Z}/m,1);\mathbb{Z})$.

27. Докажите, что если $\mathbb{R}P^n$ имеет структуру (пунктированного) H-пространства, то $n = 2^k - 1$. Выведите, что структура алгебры с делением на $\mathbb{R}^n$ может быть только при $n = 2^k$.
(На самом деле это верно лишь при $k = 0,1,2,3$.)
Аналогично, докажите, что $\mathbb{C}P^n$ не может иметь структуру H-пространства при $n > 0$. Выведите, что поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.

28. Вычислите гомоморфизм колец $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{R}P^{2n+1};\mathbb{Z})$, индуцированный отображением $\mathbb{R}P^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, переводящим вещественную прямую $\ell \subset \mathbb{R}^{2n+2} = (\mathbb{R}^2)^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}$ в содержащую её комплексную прямую.

29. Для отображения $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ ($n \geqslant 2$) рассмотрим пространство $C_f = S^n \cup_f D^{2n}$, получающееся приклеиванием $2n$-мерной клетки к сфере S^n по отображению f. Убедитесь, что $H^i(C_f) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n, 2n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, причём отображение факторизации $C_f \to S^{2n}$ (стягивание n-остова) индуцирует изоморфизм на $H^{2n}(S^{2n}) \to H^{2n}(C_f)$. Обозначим образ стандартной образующей $\iota^{2n} \in H^{2n}(S^{2n})$ через $v \in H^{2n}(C_f)$.
Убедитесь, что для образующей $u \in H^n(C_f)$ в кольце $H^*(C_f)$ имеет место равенство $u^2 = H(f)v$ для некоторого целого числа $H(f) \in \mathbb{Z}$, называемого *инвариантом Хопфа* отображения f.
а) Докажите, что для нечётного n инвариант Хопфа равен нулю. Чему равен $H(\eta)$ для расслоения Хопфа $\eta\colon S^3 \to \mathbb{C}P^1 = S^2$ (см. пункт б) задачи 3 первого листочка)?
б) Докажите, что инвариант Хопфа корректно определяет гомоморфизм групп $H\colon \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbb{Z}$.
в)* Докажите, что если сфера S^n является H-пространством, то существует отображение $f\colon S^{2n+1} \to S^{n+1}$ с инвариантом Хопфа, равным 1.
(На самом деле это равносильные условия и они выполнены только для $n = 0, 1, 3, 7$)
г)* Докажите, что $H([\iota_{2n}, \iota_{2n}]) = 2$, где $[\iota_{2n}, \iota_{2n}]$ — скобка Уайтхеда для образующей $\iota_{2n} \in \pi_{2n}(S^{2n})$. (Это было обещано в задаче 16 листочка 2).

30. Рассмотрим две копии $\mathbb{C}P^2$ — $\mathbb{C}P^2_1$ и $\mathbb{C}P^2_2$. Вырежем из них два маленьких шарика $D^4_i \subset \mathbb{C}P^2_i$. Можем считать, что эти шарики лежат в старших клетках, откуда на них переносится ориентация с внутренности клеток. Склеим оставшиеся пространства $\mathbb{C}P^2_i - D^4_i$ по гомеоморфизму граничных сфер $\partial D^4_1 \cong \partial D^4_2$. Гомеоморфизм сферы может либо сохранять, либо обращать ориентацию. Обозначим через $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ склейку полученную по гомеоморфизму, сохраняющему ориентацию сфер, и через $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ — полученную по гомеоморфизму, обращающему ориентацию.
Вычислите кольца когомологий $H^*(\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2)$ и $H^*(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ и убедитесь, что они не изоморфны.

31.* Вычислите кольцо когомологий $H^*(M(\mathbb{Z}/m, n)^{\times k}; \mathbb{Z}/m)$ декартовой степени пространства Мура $M(\mathbb{Z}/m, n)$.

32.* Для абелевой группы G и $n > 1$ и пространства Мура $M(G, n)$ рассмотрим множество $[M(G, n), X]_\bullet$, обобщающее гомотопическую группу $\pi_n(X)$. Докажите, что это множество имеет естественную структуру группы (абелевой при $n > 2$) и имеет место естественная короткая точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \pi_{n+1}(X)) \to [M(G, n), X]_\bullet \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \pi_n(X)) \to 0$$

33.* Приведите примеры таких пространств X_1, X_2 и Y, что кольца $H^*(X_1; \mathbb{Z})$ и $H^*(X_2; \mathbb{Z})$ изоморфны, но кольца $H^*(X_1 \times Y; \mathbb{Z})$ и $H^*(X_2 \times Y; \mathbb{Z})$ не изоморфны.