НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее вечера среды 1 июля. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Пересчет баллов в оценки НМУ следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач (включая те листки, которые ещё будут появляться после этого экзамена), но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.

Пересчет баллов в оценки ВШЭ для перезачитывающих там следующий:

$$\min\left(10, \left\lceil \frac{\textit{сумма баллов}}{5} \right\rceil\right).$$

Зачёт для ВШЭ не нужен.

Задача 1. Рассмотрим две такие гладкие регулярные кривые $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$ в трёхмерном евклидовом пространстве, что а) s натуральный параметр на первой кривой, б) проходящая через точку $\gamma_1(s)$ прямая с направляющим вектором $\mathbf{n}_1(s)$, то есть вектором нормали к первой кривой, проходит через точку $\gamma_2(s)$, и вектор $\mathbf{n}_2(s)$, то есть вектором нормали ко второй кривой, тоже является направляющим вектором этой кривой. Докажите, что в этих условиях расстояние между точками $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$ не зависит от s, а угол между векторами скорости $\mathbf{v}_1(s)$, $\mathbf{v}_2(s)$ постоянен. *(5 баллов).*

Задача 2. Рассмотрим на двумерной поверхности в трёхмерном пространстве кривую, нормальная кривизна которой ноль, а касательный вектор в каждой её точке совпадает с главным направлением поверхности. Доказать, что гауссова кривизна поверхности в точках кривой равна нулю, а кривая плоская. *(10 баллов).*

Задача 3. Найти результат параллельного переноса вектора $(0, 1, 1)$ из точки $(1, 0, 0)$ однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2 = 1$ в точку $(1, -1, 1)$ вдоль прямолинейной образующей

$$\begin{cases} x = 1, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

(10 баллов).

Задача 4. Пусть $[z_0 : \dots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \dots : z_n]) = [\dots : z^I : \dots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \dots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^*\gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(10 баллов).*

Задача 5. Пусть M риманово многообразие. Пусть ∇ связность Леви-Чивиты. Определим гессиан гладкой функции формулой $\operatorname{Hess} f = \nabla df$. Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\operatorname{Hess} f(X, Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные. Докажите, что $\mathrm{Hess}\, f(X,Y) = (\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) = \frac{1}{2}(L_{\operatorname{grad} f}\, g)(X,Y)$. *(10 баллов).*

Задача 6. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N. Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. *(5 баллов).*

Задача 7. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ такая гладкая функция, что $|\operatorname{grad} f| = 1$ на всём M. Доказать, что интегральные кривые векторного поля $\operatorname{grad} f$ являются геодезическими *(15 баллов).*

Задача 8. Доказать, что над $\mathbb{S}^1$ есть с точностью до изоморфизма только два вещественных векторных расслоения ранга 1, тривиальное и лист Мёбиуса. Так как $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$, то универсальное расслоение γ^1 над $\mathbb{RP}^1$ можно рассматривать как расслоение над $\mathbb{S}^1$. Оно изоморфно тривиальному или листу Мёбиуса? *(15 баллов).*

Задача 9. Найдите $\mathrm{ch}(\xi_k)$, где ξ_k тривиальное расслоение ранга k *(5 баллов).*

Задача 10. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M, то есть числа Потрягина касательного расслоения TM, равны нулю. *(15 баллов).*

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.