Листок 8, 17 ноября 2025 г.

Задача 1. Пусть алгебра A конечномерна. Докажите, что

1. $x \in \mathcal{R}_A$ тогда и только тогда, когда x действует нулем во всех простых левых A-модулях,
2. $x \in \mathcal{R}_A$ тогда и только тогда, когда x действует нулем во всех простых правых A-модулях,
3. $\mathcal{R}_A$ равен пересечению всех правых максимальных идеалов.

Задача 2. Пусть D – тело. Опишите все двусторонние идеалы в алгебре $D[t]$.

Задача 3. Докажите, что все автоморфизмы матричной алгебры над полем являются внутренними.

Задача 4. Пусть $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ – алгебраическое расширение полей. Докажите, что $\mathbb{K}' \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ — полупростая алгебра для всех $\mathbb{L}$ тогда и только тогда, когда расширение $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ сепарабельно.

Задача 5. Пусть D — тело над $\mathbb{K}$, а B — $\mathbb{K}$-алгебра. Докажите, что

1. двусторонние идеалы в алгебре $D \otimes_{\mathbb{K}} B$ порождаются двусторонними идеалами в алгебре $Z(D) \otimes_{\mathbb{K}} B$,
2. если $Z(D) = \mathbb{K}$, а B — простая, то $D \otimes_{\mathbb{K}} B$ – простая.

Задача 6. Докажите, что тензорное произведение центральных простых алгебр над полем $\mathbb{K}$ является центральной простой алгеброй над полем K.

Задача 7. Докажите, что $A^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{K}} A$ — матричная алгебра над полем $\mathbb{K}$.

Задача 8. Докажите, что множество классов изоморфизма всех центральных тел над полем K изоморфно группе $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}), \overline{\mathbb{K}}^{\times})$. Эта группа называется *группой Брауэра* поля $\mathbb{K}$.

Задача 9. Назовем две центральные простые алгебры A, B над полем K *подобными*, если $\mathrm{Mat}_{n\times n}(A) \simeq \mathrm{Mat}_{m\times m}(B)$. Докажите, что

1. множество классов подобия центральных простых алгебр над полем K с операцией $\otimes$ образуют группу,
2. эта группа изоморфна группе Брауэра поля K.

Задача 10. Докажите, что множество классов изоморфизма всех центральных алгебр над полем $\mathbb{K}$, разлагающихся над полем $\mathbb{L}$, изоморфно группе $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}), \mathbb{L}^{\times})$. Докажите, что в каждом классе подобия найдется ровно одно тело.

Задача 11. Вычислите группу Брауэра полей $\mathbb{R}$; $\mathbb{F}_q$. Найдите все центральные тела над полем $\mathbb{R}$; $\mathbb{F}_q$.

Задача 12. (Теорема Гильберта 90) Докажите, что

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}), L^{\times}) = 0, \qquad \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}), L^{\times}) = 0.$$