

Относительные гомологии

Задача 3.1. а) Для каждой точки $x \in X$ постройте цепные отображения $\tilde{C}_*(X) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, x)$ и убедитесь, что индуцированный гомоморфизм $\tilde{H}_*(X) \rightarrow H_*(X, x)$ — изоморфизм.

б) Выведите, что $H_*(X) \simeq \tilde{H}_*(X) \oplus \mathbb{Z}$, если $X \neq \emptyset$. (А что, если $X = \emptyset$?)

в) Докажите, что изоморфизм из пункта б) нельзя сделать естественным.

Задача 3.2. Докажите: $i : A \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм на гомологиях $\iff H_*(X, A) = 0$.

Задача 3.3. Докажите *естественность* точной последовательности пары: если $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — отображение пар, то диаграмма ниже коммутативна.

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Задача 3.4. Пусть $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — гомотопные отображения пар¹. Докажите, что индуцированные отображения $f_*, g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ равны.

Задача 3.5. Пусть $B \subset A \subset X$ — пространства. а) Постройте *точную последовательность тройки*

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X, B) \rightarrow \dots$$

б) Докажите, что ∂ раскладывается в композицию $H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_0} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(A, B)$, где ∂_0 — граничный гомоморфизм в точной последовательности пары (X, A) .

Задача 3.6. Пусть $i : A_\bullet \hookrightarrow B_\bullet$ — цепной подкомплекс. Завершите доказательство зигзаг-леммы: докажите, что в последовательности гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(B_\bullet/A_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j_*} H_n(B_\bullet/A_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A_\bullet) \rightarrow \dots$$

а) если $x \in H_n(A_\bullet)$ и $i_*(x) = 0$, то $x \in \text{Im } \partial$;

б) если $y \in H_n(B_\bullet)$ и $j_*(y) = 0$, то $y \in \text{Im } i_*$;

в) если $z \in H_n(B_\bullet/A_\bullet)$ и $\partial(z) = 0$, то $z \in \text{Im } j_*$.

Задача 3.7 (лемма Лебега). Пусть (X, ρ) — компактное метрическое пространство, $X = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$ — его открытое покрытие. Докажите, что найдётся $\varepsilon > 0$ со следующим свойством: если $A \subset X$ и $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$, то $A \subset U_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Задача 3.8*. Введём категорию Δ_{inj} : объекты — множества вида $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$; морфизмы — монотонные инъекции. *Полусимплициальное множество* — это контравариантный функтор $\Delta_{\text{inj}} \rightarrow \text{Set}$. Проверьте, что любой симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ (с упорядоченными вершинами) задаёт полусимплициальное множество $[n] \mapsto \{n\text{-мерные грани комплекса } \mathcal{K}\}$.

Задача 3.9*. Определите а) геометрическую реализацию; б) симплициальные гомологии полусимплициального множества. (Для симплициальных комплексов получится то же, что и раньше.)

Задача 3.10*. Постройте полусимплициальное разбиение а) тора; б) бутылки Клейна, и посчитайте их гомологии.

¹То есть, существует гомотопия $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ между f и g такая, что $F(A \times [0, 1]) \subseteq B$.