НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 7.
Когомологии де Рама. 5.12.2025.

В данном листке под когомологиями подразумеваются исключительно когомологии де Рама. При решении задач данного листка запрещено использовать изоморфизмы с другими когомологиями.

Задача 1. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ (дизъюнктное объединение). Докажите, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

Задача 2. Найдите когомологии двумерного тора $\mathbb{T}^2$ и проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

Задача 3. Доказать, что отображение

$$\omega \mapsto \int_{\mathbb{S}^n} \omega$$

задает изоморфизм $H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$.

Задача 4. Найдите когомологии $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}P^n$.

Задача 5*. Найдите $H^i_c(\mathbb{R}^2)$.

Задача 6. *(Лемма о пяти гомоморфизмах).* Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e & & \\
\dots & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

из векторных пространств и их гомоморфизмов, такую что горизонтальные стрелки образуют две точные последовательности. Докажите, что если a, b, d, e являются изоморфизмами, то c тоже изоморфизм.

Задача 7. Найдите когомологии $\mathbb{CP}^n$. Найти кольцо когомологий $\mathbb{RP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{RP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях).

Задача 8. Найти когомологии $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ (дополнение к окружности в трехмерном пространстве) и когомологии $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ (дополнение к окружности в трехмерной сфере).

Задача 9*. Докажите лемму Пуанкаре для когомологий с компактным носителем: $H^k_c(M \times \mathbb{R}^1) = H^{k-1}_c(M)$. *Указание.* Пусть t обозначает стандартную координату на $\mathbb{R}$. Рассмотрите отображение послойного интегрирования $\pi_* : \Omega^k_c(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega^{k-1}_c(M)$, которое формы без dt переводит в ноль, а формы с dt интегрирует $\int_{\mathbb{R}^1}$. Пусть $e = e(t)dt$ такая форма с компактным носителем на $\mathbb{R}^1$, что $\int_{\mathbb{R}^1} e = 1$. Рассмотрите отображение $e_* : \Omega^{k-1}_c(M) \longrightarrow \Omega^k_c(M \times \mathbb{R}^1)$, это просто операция умножения на e. В качестве оператора гомотопии рассмотрите оператор $K : \Omega^k_c(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega^{k-1}_c(M \times \mathbb{R}^1)$, который переводит формы без dt в ноль, а формы с dt он преобразует так:

$$\omega \mapsto \int_{-\infty}^{t} \omega - \int_{-\infty}^{t} e \int_{-\infty}^{+\infty} \omega.$$

Задача 10. Найдите когомологии с компактным носителем листа Мебиуса.