

Листок 10. 21 апреля 2025 г.

G — конечная группа. Рассмотрим векторное пространство $K[G]$ над полем K , с базисом $\{e_g\}_{g \in G}$, занумерованным элементами группы G , и определим в нём операцию умножения формулой

$$\left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h e_h \right) = \sum_{g, h \in G} a_g b_h e_{gh}.$$

Легко видеть, что пространство $K[G]$ является K -алгеброй. Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G .

Задача 1. Докажите, что категория K -линейных представлений группы G эквивалентна категории $K[G]$ -модулей.

Рассмотрим представление в пространстве $K[G]$, которое задаётся формулой

$$g \left(\sum_{h \in G} a_h e_h \right) = \sum_{h \in G} a_h e_{gh},$$

и соответствует свободному $K[G]$ -модулю ранга 1. Это представление называется *регулярным*. Его размерность равна порядку группы G .

Задача 2. Разложите над полем $\mathbb{C}$ в сумму неприводимых регулярное представление группы

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
2. S_3 .

Задача 3. Вычислите действие функторов $\otimes$ и $*$ на неприводимых представлениях группы

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
2. S_3 .

Задача 4. Докажите, что

1. $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$;
2. $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$;
3. $\mathbb{C}[S_3] = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.

Задача 5. Докажите эквивалентность категорий $\text{Rep}_G(K) \cong \prod_p \text{Vect}_K$ (произведение по классам изоморфизма неприводимых представлений), если $\overline{K} = K$, $\text{char } K = 0$, а G — конечная группа.

Задача 6. Пусть V — представление конечной группы G над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

1. Докажите, что на V существует G -инвариантное положительно определенное скалярное (эрмитово) произведение;
2. Выведите из этого полную приводимость V .

Задача 7. Пусть группа G действует на множестве X , а $K[X]$ — пространство K -значных функций на X .

1. Определите на $K[X]$ структуру G -модуля.
2. Докажите, что $K[G]$ — регулярное представление;
3. $X \mapsto K[X]$ — контравариантный функтор $\text{Sets}_G \rightarrow \text{Rep}_G(K)$;
4. $K[X \times Y] \cong K[X] \otimes K[Y]$.

Задача 8. Докажите, что

1. $\otimes$ в категории $\text{Rep}_G(K)$ коммутативно и ассоциативно;
2. $\text{Hom}(1_G, V) \cong V$, $1_G \otimes V \cong V$, $1_G^* \cong 1_G$;
3. $\text{Hom}(\varepsilon, \varepsilon) \cong 1_{S_n}$, $\varepsilon \otimes \varepsilon \cong 1_{S_n}$, $\varepsilon^* \cong \varepsilon$;
4. $V \otimes K[G] \cong K[G]^{\oplus \dim V}$, $K[G]^* \cong K[G]$.

Задача 9. Докажите, что функториальные морфизмы

$$\begin{aligned} \text{ev} : V^* \otimes V &\rightarrow 1_G, \\ \text{ev}^* : 1_G &\rightarrow V^* \otimes V, \\ V &\rightarrow V^{**}, \\ U^* \otimes V &\rightarrow \text{Hom}(U, V), \\ \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)) &\rightarrow \text{Hom}(U \otimes V, W) \end{aligned}$$

являются G -эквивариантными.

Задача 10.

- (a) Пусть G — конечная подгруппа в группе $\text{SO}(3; \mathbb{R})$. Докажите, что G совпадает с одной из следующих групп:
 - (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
 - (2) группа симметрий правильного n -угольника (группа диэдра);
 - (3) группа вращений тетраэдра;
 - (4) группа вращений куба (октаэдра);
 - (5) группа вращений икосаэдра (додекаэдра).
- (b) Опишите все конечные подгруппы в $\text{SU}(2)$;
- (c) $\text{SL}(3; \mathbb{R})$;
- (d) $\text{SL}(2; \mathbb{C})$.