6. Лекция 6. Редуктивные алгебры Ли. Инвариантные билинейные формы, критерии Картана разрешимости и полупростоты.

Все алгебры Ли в этой лекции конечномерные и над полем $\mathbb{C}$.

6.1. Радикал алгебры Ли.

Предложение 6.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ её радикал. Пусть V – произвольное неприводимое представление. Тогда существует $\lambda \in \mathrm{rad}(\mathfrak{g})^*$ такой, что $x \cdot v = \lambda(x) \cdot v$ для любого $x \in \mathrm{rad}(\mathfrak{g}), v \in V$. В частности, если $x \in [\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})]$, то $x \cdot v = 0$.

Доказательство. Кириллов, Теорема 6.27. □

6.2. Редуктивные алгебры Ли.

Определение 6.2. Алгебра Ли называется редуктивной, если $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Примеры. 1) Полупростая алгебра Ли.
2) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

6.3. Инвариантная билинейные формы.

Определение 6.3. Билинейная форма $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ называется инвариантной, если

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]) \quad \forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Примеры. 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), B = \mathrm{tr}(xy), x, y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
2) $\mathfrak{g}$ – любая, (ρ, V) – представление, $B_V(x, y) = \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y))$.

Лемма 6.4. Пусть $I \subset \mathfrak{g}$ идеал. Тогда $I^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, B(x, y) = 0 \,\forall\, y \in \mathfrak{g}\}$ является идеалом. В частности, $\ker B = \mathfrak{g}^\perp$ – идеал.

Предложение 6.5. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, V – такое представление, что форма B_V невырождена. Тогда $\mathfrak{g}$ – редуктивна.

Доказательство. Кириллов, Теорема 6.32. □

Определение 6.6. Форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ это $K := B_{\mathrm{ad}}$. Иными словами,

$$K(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y), x, y \in \mathfrak{g}$$

6.4. Критерии Картана.

Теорема 6.7 (Критерий Картана разрешимости)**.** Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда когда $K(x, y) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}, y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ – разрешима. Тогда по теореме Ли $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ в некотором базисе имеет верхнетреугольный вид, а значит $\mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – сторого-верхнетреугольный вид, откуда следует требуемое. Обратно, пусть $K(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. Достаточно доказать, что $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ разрешима. Это следует из следующей леммы ($V = \mathfrak{g}$):

Лемма 6.8. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ – подалгебра Ли, причём $\mathrm{tr}(xy) = 0$ для любого $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}$ разрешима.

Доказательство. Кириллов, Лемма 6.39. □

□

Теорема 6.9 (Критерий Картана полупростоты)**.** Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда когда форма Киллинга невырождена.

Доказательство. Пусть K невырождена. Тогда $\mathfrak{g}$ – редуктивна (предложение 6.5). Если $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, то $x \in \ker K = \{0\}$, значит, $\mathfrak{g}$ полупроста. □

Обратно, пусть $\mathfrak{g}$ полупроста. Тогда $\ker K \subset \mathfrak{g}$ идеал с нулевой формой Киллинга, а значит разрешимый. Отсюда $I = 0$.