

2

2.1. Для $X, Y \in \mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{T}_{\text{fin.dim}}$ и $\alpha : X \rightarrow Y$ введите базисы и задайте линейное отображение α матрицей. Вычислите в *двойственных* базисах *сопряжённое* линейное отображение $\alpha^* : Y^* \rightarrow X^*$.

2.2. В обозначениях предыдущей задачи, воспользовавшись отождествлениями $Z^{**} \cong Z$, проверьте равенство $\alpha^{**} = \alpha$.

Замечание. В координатах это равенство очевидно. Проведите, однако, инвариантное рассуждение.

2.3. Для $X, Y \in \mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{T}_{\text{fin.dim}}$ и двух встречных морфизмов $\alpha : X \rightarrow Y$ и $\beta : Y \rightarrow X$ установите равенство

$$\text{tr}(\alpha \circ \beta) = \text{tr}(\beta \circ \alpha).$$

Докажите *невыврожденность* связанного с этим равенством спаривания

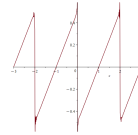
$$(X \bowtie Y) \times (Y \bowtie X) \longrightarrow \mathbb{K} : (\alpha, \beta) \mapsto \text{tr}(\alpha \circ \beta) = \text{tr}(\beta \circ \alpha).$$

Проведите рассуждения с базисами и матрицами, но также попытайтесь придумать и инвариантные доказательства.

2.4. Разложите в ряд Фурье *нечётную пилу*

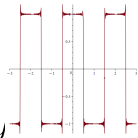
$$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}.$$

(Ответ: $x \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$). Пользуясь доступными вам компьютерными средствами, постройте графики подходящих конечных



отрезков ряда. Должно получиться что-то вроде

2.5. Разложите в ряд Фурье *чётную периодическую*



ступеньку.

25 сентября, Г.Б. Шабат