Семинар 5 (20 марта). Повторение – мать учения.

Задача 1. (а) Покажите, что $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \ltimes SL_n(\mathbb{C})$.

(б) Постройте соответствующий изоморфизм $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \ltimes \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

(в) Покажите, что $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$

Задача 2. Группы $PGL_n(\mathbb{K})$, соотв. $PSL_n(\mathbb{K})$ определяются как фактор $GL_n(\mathbb{K})$, соотв. $SL_n(\mathbb{K})$ по подгруппе скалярных матриц.

(а) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{C}) \simeq PGL_n(\mathbb{C})$ и $PSL_n(\mathbb{R}) \simeq PGL_n(\mathbb{R})$ при $n = 2k+1$.

(б) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{R})$ является собственной подгруппой Ли группы $PGL_n(\mathbb{R})$ при $n = 2k$.

(в) Докажите, что алгебры Ли групп $PGL_n(\mathbb{K})$ и $SL_n(\mathbb{K})$ изоморфны.

(г) Докажите, что $PGL_n(\mathbb{K})$ является подгруппой Ли группы Ли $GL_{n^2}(\mathbb{K})$.

Задача 3. Найдите группу компонент для групп Ли $GL_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K})$ и $PGL_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Задача 4. Пусть $\alpha\colon G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Покажите, что $Lie(ker(\alpha)) = ker(d_e\alpha)$.

Задача 5. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Пусть $\tilde{G}$ – связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть N – дискретная подгруппа центра $\tilde{G}$. Покажите, что $\pi_1(\tilde{G}/N) = N$.

Задача 6. (а) Опишите все трёхмерные подалгебры Ли (с точностью до сопряжения элементами группы $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$) в алгебре Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$.

(б) Опишите все трёхмерные виртуальные подгруппы в группе $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$;

(в) Являются ли они настоящими подгруппами Ли? Нормальны ли они?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Какие из следующих трехмерных вещественных алгебр Ли изоморфны?

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{su}_2, \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}), \mathfrak{so}_{1,2}(\mathbb{R}).$$

Покажите, что их комплексификации изоморфны $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Указание: покажите, что для всякого элемента $x \in \mathfrak{su}_2, \mathrm{ad}_x$ не имеет ненулевых вещественных собственных значений.

Задача 2. Пусть σ – автоморфизм G, обозначим той же буквой индуцированный автоморфизм $\mathfrak{g}$. Покажите, что $Lie(G^\sigma) = \mathfrak{g}^\sigma$, где $...^\sigma$ означает множество неподвижных точек.

Дополнительные задачи

Задача 3. Пусть G – вещественная группа Ли, A – какая-нибудь положительно определённая симметричная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. A индуцирует отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, которое мы будем обозначать тоже A. Продолжим A до левоинвариантной метрики на G.

(а) Пусть частица движется по G с кинетической энергией $A(\dot{g}, \dot{g})$ и нулевой потенциальной энергией. Покажите, что уравнения движения этой системы выглядят как

$$\frac{d}{dt}(Av) = \mathrm{ad}_v^*(Av),$$

где $v = d_g L_{g^{-1}}(\dot{g})$, а ad^* означает коприсоединённое действие $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$: $\langle \mathrm{ad}_x^*(f), y \rangle = -\langle f, \mathrm{ad}_x(y) \rangle$

(б) Покажите, что если A – биинвариантная (т.е. лево- и правоинвариантная) метрика на G, то однопараметрические подгруппы являются геодезическими для A. Как в таком случае выглядят геодезические через произвольную точку