Спецкурс НМУ задачи

Е.Е.Баштова

весна 2025

Часть 1

1. (свойство автомодельности винеровского процесса) Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс и $a > 0$. Доказать, что случайный процесс $B_t = \sqrt{a} W_{t/a}$ — тоже винеровский.

2. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. а) Доказать, что $B_t := tW_{1/t}$ при $t > 0$, $B_0 = 0$ – винеровский процесс. б) Доказать, что случайная величина $\sup_{t \geq 0}(|W_t| - t)$ с вероятностью 1 конечна. в) доказать, что случайные величины $\sup_{t \geq 0}(|W_t| - t)$ и $\sup_{t \geq 0} \frac{|W_t| - 1}{t}$ одинаково распределены.

3. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Доказать, что случайные величины $\sup_{t \geq 0}(|W_t| - t)$ и $\sup_{t \geq 0} \frac{W_t^2}{(1+t)^2}$ одинаково распределены. Указание: свойство автомодельности винеровского процесса.

4. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Случайный процесс W^0 на $[0, 1]$ называется броуновским мостом, если $W_t^0 = W_t - tW_1$, $t \in [0, 1]$. Доказать что случайные величины $\sup_{t \geq 0} \frac{|W_t|}{1+t}$ и $\sup_{t \in [0,1]} |W_t^0|$ одинаково распределены. Указание: подобрать неслучайные функции f и g так, чтобы процесс $t \mapsto f(t) W_{g(t)}^0$ оказался винеровским.

5. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $f(0) > 0$. Доказать, что $\mathsf{P}(\sup_{t>0}(W_t - f(t)) = 0) = 0$. Указание: если ξ и η независимы и ξ имеет плотность, то $\xi + \eta$ имеет плотность.

6. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, $M_t = \sup_{s \leq t} W_s$. Найти совместную плотность (M_t, W_t). Указание: найти выражение для вероятности $\mathsf{P}(M_t > a, W_t \leq b)$, при $a \geq b$.

7. Найти плотность максимального нуля винеровского процесса на отрезке $[0, 1]$ (т.е. случайной величины $\sup\{t \in [0, 1] : W_t = 0\}$).

Часть 2

1. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, а непрерывный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ согласован с естественной фильтрацией W и таков, что $\int\limits_0^\infty X_s^2 ds = \infty$ п.н. Доказать, что случайная величина $\int\limits_0^\tau X_s dW_s$ имеет стандартное нормальное распределение, если $\tau = \inf\{t > 0 : \int\limits_0^t X_s^2 ds = 1\}$.

2. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, а τ — марковский момент относительно естественной фильтрации W. Рассмотрим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}\{t \leq \tau\}, t \geq 0$. а) Доказать, что при фиксированном $t > 0$ существует последовательность простых функций $\{X_n, n \geq 1\}$, сходящаяся к X в $L^2([0,t] \times \Omega)$ (и. следовательно, определен интеграл Ито от X); б) какой случайной величине равен $\int\limits_0^t X_s dW_s$? в) доказать, что если $\mathsf{E}\tau < \infty$, то $\mathsf{E}W_\tau = 0$.

3. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – винеровский процесс, и $\mu \neq 0$, $a > 0$. а) доказать, что $\mathsf{P}(\max_{s \leq t}(W_s + \mu s) \geq a) = \mathsf{E}\mathbb{I}\{\tau_a \leq t\}e^{\mu W_t - \mu^2 t/2}$, где $\tau_a = \inf\{t > 0 : W_t = a\}$. б) найти выражение для этой вероятности через элементарные функции и стандартную нормальную функцию распределения. (указание: найти плотность τ_a и использовать тождество $\frac{a}{x^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu x - a}{\sqrt{x}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu x + a}{\sqrt{x}}$).

4. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – винеровский процесс. а) Доказать, что $B_t = \int\limits_0^t sgn(W_s) dW_s$ — тоже винеровский процесс. б) Является ли случайный вектор (W_1, B_1) гауссовским?

5. Доказать, что локальное время в нуле L_t винеровского процесса $W = \{W_t, t \geq 0\}$ обладает таким свойством:

$$L_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{I}\{|W_s| < \varepsilon\} ds \text{ п.н.}, \ t > 0.$$