4. Лекция 4. Одсосвязные группы Ли. Три теоремы Ли.

Предложение 4.1. (1) Связная компонента единицы G^0 группы Ли G является нормальной подгруппой Ли, в частности для любой группы Ли имеется короткая точная последовательность

$$1 \to G^0 \to G \to G/G^0 \to 1$$

(2) Фактор группа G/G^0 является дискретной группой Ли

Доказательство. 1) Образ связного множества при непрерывном отображении связен. В частности, при непрерывном отображении образ компоненты связности целиком попадает в некоторую компоненту связности. Это означает, что

(1) $S(G^0) \subset G^0$, так как $S(e) = e$. В частности, для любого $g \in G^0$ имеем $g^{-1} \in G^0$.
(2) Для $g \in G^0$ имеем $gG^0 \subset G^0$, так как $gg^{-1} = e \in G^0$.
(3) Для $g \in G$ имеем $gG^0g^{-1} \subset G^0$, так как $geg^{-1} = e \in G^0$.

Таким образом, G^0 является номральной подгруппой группы Ли G.

2) Отображение $p : G \to G/G^0$ является гомоморфизмом групп Ли, при этом прообраз каждой точки, является компонентой связности, то есть открытым подмножеством в G. Это значит, что каждая точка открыта в факторе.

□

Замечание. Точная последовательность, вообще говоря, не расщепима. Рассмотрим группу Ли G матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & m & a \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, m, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что подгруппа матриц вида $G^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ является связной компонентной единицы и $G/G^0 \simeq \mathbb{Z}^2$.

Отсюда получаем точную последовательность $1 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}^2 \to 1$, которая не расщепляется. В самом деле, для любого поднятия $s : \mathbb{Z}^2 \to G$ (т.е. такого гомоморфизма групп, что $s \circ \pi = \mathrm{id}$) имеем

$$s(1,0)s(0,1)s(1,0)^{-1}s(0,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 1.$$

Последнее предложение в некотором смысле сводит изучение произвольных групп Ли к связным и к изучению вопроса о расширении связных групп Ли дискретными. В дальнейшем мы сосредоточим своё внимание на связных группах Ли. Отметим важное свойство связных групп Ли.

Предложение 4.2. Связная группа Ли G порождается любой окрестностью единицы U.

Доказательство. Действительно, пусть H – подгруппа в G, порождённая некоторой окрестностью единицы U. Тогда G является дизъюнктынм объединением

$$G = \bigcup_{g \in I} gH,$$

где I – набор представителей смежных классов G/H. Заметим, что подгруппа H – открыта. Тогда и любой смежный класс gH открыт. Из связности G следует, что $G = H$. □

4.1. **Универсальное накрытие группы Ли.** Пусть G – связная группа Ли. Из общей теории следует, что существует односвязное многообразие $\tilde{G}$ и гладкое отображение $p : \tilde{G} \to G$, что p является топологическим накрытием (такое накрытие называется универсальным). Оно единственно в следующем смысле: пусть имеется два универсальных накрытия $(\tilde{G}, \tilde{\pi} : \tilde{G} \to G)$ и $(\hat{G}, \hat{\pi} : \hat{G} \to G)$. Выберем точки $\tilde{e}, \hat{e}$ такие, что $\tilde{\pi}(\tilde{e}) = \hat{\pi}(\hat{e}) = e$. Тогда существует единственный диффеоморфизм $\Psi : \tilde{G} \to \hat{G}$ такой, что $\Psi(\tilde{e}) = \hat{e}$ (4.23). Оказывается, $\tilde{G}$ является группой Ли.

Теорема 4.3. Пусть G – связная группа Ли. Тогда на $\tilde{G}$ существует единственная с точностью до изоморфизма структура группы Ли при которой накрытие $p : \tilde{G} \to G$ – гомоморфизм групп Ли. При этом:

(1) $G \simeq \tilde{G}/N$, где N – дискретная подгруппа центра группы $\tilde{G}$;
(2) $\pi_1(G) = N$, в частности, фундаментальная группа связной группы Ли коммутативна;
(3) Алгебра Ли $\tilde{G}$ совпадает с алгеброй Ли G;
(4) $\tilde{G}/N_1 \simeq \tilde{G}/N_2$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $f : \tilde{G} \to \tilde{G}$ такой, что $f(N_1) = N_2$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\pi} : \tilde{G} \to G$ – универсальное накрытие. Отметим, что $\tilde{\pi} \times \tilde{\pi} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G \times G$ также является универсальным накрытием, в частности, гладким отображением. Выберем некоторый прообраз единицы $\tilde{e}$. Тогда отображение

$$m \circ (\tilde{\pi} \times \tilde{\pi}) : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$$

имеет единственное поднятие

$$\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G},$$

такое, что $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$. Аналогично отображение

$$i \circ \tilde{\pi} : \tilde{G} \to G$$

имеет единственное поднятие

$$\tilde{i} : \tilde{G} \to \tilde{G},$$

такое, что $\tilde{i}(\tilde{e}) = \tilde{e}$.

Мы утверждаем, что $(\tilde{G}, \tilde{m}, \tilde{i}, \tilde{e})$ – группа Ли. Для этого достаточно проверить групповые аксиомы.

a) Ассоциативность. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[d, "M"] \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\ G & \tilde{G} \arrow[l, "\tilde{\pi}"'] \end{tikzcd}$$

Здесь $M(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = xyz$, если $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ – некоторые поднятия элементов $x, y, z \in G$. Существует единственное отображение $\psi, \psi(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, делающее диаграмму коммутативной. Отображения $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}, (a, b, c) \mapsto (ab)c$ и $(a, b, c) \mapsto a(bc)$ отображают $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ в $\tilde{e}$ и делают такую диаграмму коммутативной, следовательно, совпадают.

b) Единица. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & \tilde{G} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Из односвязности $\tilde{G}$ следует, что существует единственное $\psi, \psi(\tilde{e}) = \tilde{e}$, делающее диаграмму коммутативной. Отображения $\tilde{G} \to \tilde{G}, a \mapsto a \cdot \tilde{e}$ и $a \mapsto \tilde{e} \cdot a$, а также id отображают $\tilde{e}$ в $\tilde{e}$ и делают такую диаграмму коммутативной, следовательно, совпадают.

c) Обратный элемент. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}\times\tilde{G} \arrow[d, "I"] \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\ G & \tilde{G} \arrow[l, "\tilde{\pi}"'] \end{tikzcd}$$

Здесь $I = m\circ(\mathrm{id}\times i)\circ(\tilde{\pi}\times\tilde{\pi})$. Из односвязности $\tilde{G}$ следует, что существует единственное $\psi, \psi(\tilde{e},\tilde{e}) = \tilde{e}$, делающее диаграмму коммутативной. Отображения $\tilde{G}\to\tilde{G}, (a,b)\mapsto a\cdot\tilde{i}(b)$ и $(a,b)\mapsto\tilde{i}(a)\cdot b$, а также $(a,b)\mapsto\tilde{e}$ отображают $\tilde{e}$ в $\tilde{e}$ и делают такую диаграмму коммутативной, следовательно, совпадают. Ограничение на элементы вида (x,x) даёт аксиому обращения в группе.

Таким образом $\tilde{G}$ – группа Ли. Более того $\tilde{\pi}$ – гомоморфизм групп Ли, что следует из определения $\tilde{m}$.

Единственность следует из следующего наблюдения. Пусть $(\tilde{G},\tilde{e}), \tilde{\pi} : \tilde{G}\to G$ и $(\hat{G},\hat{e}), \hat{\pi} : \hat{G}\to G$ – два универсальных накрытия связной группы Ли G. Здесь $\tilde{\pi}(\tilde{e}) = \hat{\pi}(\hat{e}) = e$ – некоторые поднятия единицы. Тогда существует единственный диффеоморфизм $\Psi : \tilde{G}\to\hat{G}$ такой, что $\Psi(\tilde{e}) = \hat{e}$ и $\hat{\pi}\circ\psi = \tilde{\pi}$. Покажем, что Ψ – гомоморфизм групп Ли. Достаточно показать, что

$$\Psi\circ\tilde{m} = \hat{m}\circ(\Psi\times\Psi).$$

Оба отображения являются поднятиями $m\circ(\tilde{\pi}\times\tilde{\pi})$ и отображают $(\tilde{e},\tilde{e})\to\hat{e}$ и, следовательно, совпадают.

1) Пусть $N = \mathrm{Ker}\, p$. Так как $p : \tilde{G}\to G$ – гомоморфизм групп Ли, то $G\simeq\tilde{G}/N$. Из того, что p – накрытие, следует, что N дискретная подгруппа, см. лемму ниже.

Лемма 4.4. Всякая дискретная нормальная подгруппа связной группы Ли содержится в её центре.

Доказательство. Пусть G – произвольная связная группа Ли. Рассмотрим отображение

$$C_g : G\times N\to N, (g,n)\mapsto gng^{-1}.$$

Оно непрерывно как ограничение отображения сопряжения $G\times G\to G$ на $G\times N$. Так как G – связна, а N – дискретна, то компоненты связности $G\times N$ имеют вид $G\times\{n\}, n\in N$. Тогда для любого $n\in N$ имеем $C_g(G\times\{n\}) = n'$ для некоторого $n'\in N$. При этом образ (e,n) это n, значит $n' = n$, откуда следует, что n лежит в центре группы Ли G. □

2) Любой автоморфизм накрытия (4.24) имеет вид $L_g, g\in N$, где

$$L_g : \tilde{G}\to\tilde{G}, x\mapsto gx,\ \forall\, x\in\tilde{G}.$$

Действительно, легко видеть что любое такое отображение – автоморфизм. С другой стороны, любой автоморфизм должен переводить $\tilde{e}$ в элемент из N и однозначно определяется своим действием на N (4.26). Фундаментальная группа G антиизоморфна группе автоморфизмов накрытия (4.26). Так как N – коммутативна, то антиизоморфизм групп является изоморфизмом.

3) Следует из следующей леммы:

Лемма 4.5. Следующие свойства гомоморфизма групп Ли $f : G\to H$ эквивалентны:

(1) Отображение f является диффеоморфизмом некоторых окрестностей единицы групп Ли G и H;
(2) Ядро $\mathrm{Ker}\, f$ – дискретная подгруппа G;
(3) Отображение f – накрытие;
(4) Отображение $d_e f$ – изоморфизм касательных алгебр.

Доказательство. ($1 \Longrightarrow 2$) Выберем окрестность единицы $U \subset G$ как в условии. Тогда $\ker f \cap U = \{e\}$. Если $g \in \operatorname{Ker} f$ рассмотрим окрестность gU точки g. Тогда $gU \cap \operatorname{Ker} f = \{g\}$, иначе, если $g' \in gU \cap \operatorname{Ker} f$, то $g^{-1}g' \in U \cap \ker f$, следовательно $g = g'$.

($2 \Longrightarrow 3$) $p^{-1}(e) = \operatorname{Ker} f$. Пусть $U \ni e$ такая окрестность, что $U \cap \operatorname{Ker} f = \{e\}$. Тогда $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{g \in \operatorname{Ker} f} g \cdot p^{-1}(e)$.

($3 \Longrightarrow 4$) $G \simeq H/\ker f$ и $\dim(\ker f) = 0$, отсюда $T_eG \simeq T_eH$.

($4 \Longrightarrow 1$) Следует из теоремы о неявной функции. □

4) Рассмотрим такое поднятие (4.23) $\tilde{f} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ изоморфизма $f : \tilde{G}/N_1 \to \tilde{G}/N_2$, что $\tilde{f}(\hat{e}) = \hat{e}$, где $\hat{e}$ – единица группы $\tilde{G}$. Тогда $\tilde{f}$ – изоморфизм групп, так как отображения $\tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$: $(x, y) \mapsto \tilde{f}(xy)$ и $(x, y) \mapsto \tilde{f}(x)\tilde{f}(y)$ – накрытия изоморфизма f и переводят $(\hat{e}, \hat{e}) \mapsto \hat{e}$. Более того $\tilde{f}(N_1) = N_2$. Обратно, любой такой автоморфизм группы $\tilde{G}$ индуцирует изоморфизм $\tilde{G}/N_1 \simeq \tilde{G}/N_2$ (**??**). □

4.2. **Примеры универсальных накрывающих групп.**

Примеры.

(1) Группа Ли $SO_2(\mathbb{R})$ как многообразие диффеоморфна S^1. Хорошо известно, что универсальное накрытие окружности это $\mathbb{R}$ и задаётся отображением $p : \mathbb{R} \to S^1, x \to e^{2\pi i x}$. Отметим, что это отображение – гомоморфизм групп Ли. Несложно показать, что любая дискретная подгруппа $\mathbb{R}$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Таким образом $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(2) Группа $SO_3(\mathbb{R})$ как гладкое многообразие диффеоморфна $\mathbb{RP}^3$. Универсальное накрытие в этом случае – сфера S^3. Это означает, что на трёхмерной сфере имеется структура группы Ли. Эту структуру можно описать явно – для этого заметим, что трёхмерная сфера диффеоморфна группе Ли SU_2. Само накрытие строится явно. Рассмотрим присоединённое представление
$$\mathrm{Ad} : SU_2 \mapsto GL(\mathfrak{su}_2).$$
Несложно показать, что присоединённое действие сохраняет невырожденную положительно-определенную билинейную форму на пространстве вещественном векторном пространстве $\mathfrak{su}_2 : X \to \det X$. Так как группа Ли SU_2 связна, это действие задаёт гомоморфизм $f : SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$. Явно проверяется, что $\operatorname{Ker} f = \{\pm E\}$, а из совпадения размерностей SU_2 и $SO_3(\mathbb{R})$ следует, что f – накрытие. Отметим, в частности, что из этого следует изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{su}_2 \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ (впрочем, это легко проверить и непосредственно). Так как $Z(SU_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то существует ровно две связных группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{su}_2 \simeq so_3(\mathbb{R})$. Более того, отсюда следует, что $\pi_1(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) Группа $SL_2(\mathbb{C})$ как топологическое пространство гомеоморфна $SU_2 \times \mathbb{R}^3$, что следует, например, из процесса ортогонализации Грамма-Шмидта. В частности, $\pi_1(SL_2(\mathbb{C})) = \{e\}$. Непосредственным вычислением проверяется, что $Z(SL_2(\mathbb{C})) = \{\pm E\}$. Это означает, что существует ровно две комплексных группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Вторая группа – это $SO_3(\mathbb{C})$. Накрытие $f : SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$ строится аналогично предыдущему примеру: присоединённое представление сохраняет невырожденную билинейную форму $X \to \det X$ на пространстве $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

(4) Группа Ли движений плоскости $SO(2) \rtimes \mathbb{R}^2$. Её универсальное накрытие изоморфно $\mathbb{R}^3$, что даёт нестандартную (неабелеву) структуру группы Ли на $\mathbb{R}^3$.

(5) Группа $SL_2(\mathbb{R})$ как топологическое пространство диффеоморфна $SO_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$, что опять следует из процесса ортогонализации Грамма-Шмидта. Это означает, что $\pi_1(SL_2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$. Более того, универсальное накрытие $SL_2(\mathbb{R})$ диффеоморфно $\mathbb{R}^3$. Таким образом, мы построили ещё одну структуру группы Ли на $\mathbb{R}^3$. Она, очевидно, не совпадает с предыдущей, так как алгебры Ли в этих двух примерах не изоморфны (например, так как $\dim[\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})] = 3$, а $\dim[\mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2, \mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2] = 1$).

Хорошего способа определить универсальное накрытие для несвязной группы Ли не существует. Например, можно было бы сказать, что универсальное накрытие несвязной группы Ли это дизъюнктное объединение универсальных накрытий связных компонент. Например на $S^1 \cup S^1$ имеется 3 структуры группы Ли.

4.3. **Вычисление фундаментальных групп.** Результаты предыдущего параграфа показывают, что для изучения произвольной связной группы в некотором смысле достаточно изучить универсальную накрывающую группу. Первый шаг – это выяснить, является ли данная группа Ли односвязной. Отсюда возникает вопрос: как вычислить фундаментальную группу группы Ли? В частных случаях возможно использовать некоторые топологические соображения. Более систематический подход даёт следующее

Предложение 4.6 (Точная последовательность локально-тривиального расслоения)**.** Пусть G – группа Ли и H – подгруппа Ли. Тогда существует следующая точная последовательность гомоморфизмов:

$$\pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H) \to H/H^0 \to 0$$

Следствие 4.7. Если $\pi_1(G/H) = \pi_2(G/H) = \{e\}$, то $\pi_1(G) \simeq \pi_1(H)$.

Пример 4.8. Покажем, что $\pi_1(SL_n(\mathbb{C})) = \{e\}$ для любого n. Рассмотрим действие $SL_n(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Это транизитивное действие, и стабилизатор $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ это $SL_{n-1}(\mathbb{C})$. Тогда $SL_n(\mathbb{C})/SL_{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. При этом $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \pi_2(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \{e\}$. Это означает, что $\pi_1(SL_n(\mathbb{C})) = \pi_1(SL_1(\mathbb{C})) = \{e\}$.

Аналогично предыдущему примеру, рассмотрев действие групп U_n и SU_n на сфере S^n, несложно показать, что $\pi_1(U_n) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(SU_n) = \{e\}$.

4.4. **Первая теорема Ли.**

Теорема 4.9 (Первая теорема Ли)**.** Пусть G – связная группа Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\{\text{Связные виртуальные подгруппы Ли группы Ли } G\} \iff \{\text{Подалгебры Ли алгебры Ли } \mathfrak{g}\}$$

$$H \mapsto T_e H$$

Более того, связная виртуальная подгруппа Ли нормальна тогда и только тогда, когда соответствующая подалгебра Ли является идеалом.

Замечание 4.10. Заметим, что для одномерных подалгебр Ли соответствующие виртуальные подгруппы были построены в (**??**).

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение теоремы. Пусть H – связная нормальная виртуальная подгруппа Ли группы G. Тогда $T_e H$ – идеал в $\mathfrak{g}$, что было доказано в (**??**). Обратно, пусть $\mathfrak{h}$ – идеал и пусть H – соответствующая связная виртуальная подгруппа Ли. Тогда $\exp(x)\exp(y)\exp(x)^{-1} \in H$ для любых $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$. Действительно, пользуясь функториальностью экспоненты, получаем

$$\exp(x)\exp(y)\exp(x)^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_{\exp(x)}\, y) = \exp(\exp(\mathrm{ad}_x)[y])$$

Так как $\mathfrak{h}$ – идеал, то $\exp(\mathrm{ad}_x)[y]$ лежит в $\mathfrak{h}$, а, следовательно, $\exp(x)\exp(y)\exp(x)^{-1} \in H$. Так как G, H – связны, то они порождаются любой окрестностью единицы. Пользуясь тем, что exp – локальный диффеоморфизм для G и H получаем, что H – нормальна.

Перейдём к доказательству самой теоремы в случае вещественной группы Ли. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей. Тогда для любого $g \in G$ можно рассмотреть соответствующее $\mathfrak{h}$ подпространство $\mathfrak{h}_g \subset T_g G$. Сопоставление $g \to \mathfrak{h}_g$ обладает следующими свойствами:

(1) $\dim \mathfrak{h}_g = \dim \mathfrak{h}$ для любого $g \in G$;

(2) Сопоставление является гладким, иными словами можно выбрать такие векторные поля $v_1, \ldots, v_k$ на группе G, что $v_1(g), \ldots, v_k(g)$ будет базисом $\mathfrak{h}_g$ в любой точке $g \in G$;
(3) Пусть w_1, w_2 такие векторные поля, что $w_1(g), w_2(g) \in \mathfrak{h}_g$ для любого $g \in G$. Тогда $[w_1, w_2](g) \in \mathfrak{h}_g$ для всех $g \in G$.

Первые два свойства очевидны (для второго достаточно взять произвольный базис $\mathfrak{h}$). Для проверки третьего свойства заметим, что если $w(g) \in \mathfrak{h}_g$ для любого $g \in G$, то $w \in \mathfrak{h}$. Тогда замкнутость распределения относительно коммутатора следует из того, что $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли.

Сопоставление каждой точке $g \in G$ векторного подпространства T_gG таким образом, что выполнены свойства 1 и 2 называется *распределением.* Свойство 3 имеет название *инволютивность.* Наша цель – проинтегрировать инволютивное распределение, то есть найти такое вложенное подмногообразие H, что $T_hH = \mathfrak{h}_h$ для любого $h \in H$.

Будем называть распределение интегрируемым, если для любого элемента $g \in G$ существует некоторое интегральное подмногообразие, то есть такое подмногообразие, что касательное пространство в точке совпадает с соответствующим подпространством распределения. Ясно что из интегрируемости распределения следует инволютивность. Действительно, если w_1, w_2 такие векторные поля, что $w_1(h), w_2(h) \in T_hH$ для всех $h \in H$, то $[w_1, w_2](h) \in T_hH$ для любого $h \in H$. Обратное утверждение является теоремой Фробениуса. Пусть D – распределение на многообразии M. Для любого $m \in M$ обозначим через D_m соответствующее подпространство пространства T_mM.

Теорема 4.11 (Теорема Фробениуса)**.** Инволютивное распределение на многообразии M локально интегрируемо. Иными словами, существует такое погруженное подмногообразие M_m содержащее m, что для любой $m' \in M_m$ имеем, что $T_{m'}M_m = D_{m'}$.

Таким образом распределение, возникающее из подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ локально интегрируемо: существует такое вложенное подмногообразие H_e содержащее e, что $T_eH_e = \mathfrak{h}$. Породим H_e подгруппу и обозначим через H связную компоненту единицы. Мы утверждаем, что H – искомая подгруппа. Для этого достаточно показать, что H является погруженным подмногообразием.

Определим топологию на H следующим образом: база окрестностей в точке $h \in H$ это

$$\{hU \mid e \in U - \text{ окрестность единицы}\}.$$

окрестности соответствующие окрестностям H_e (на H_e топология индуцированная). Очевидно, что H – многообразие. Более того, с заданной топологией вложение является погружением, так как достаточно проверять гладкость и инъективность дифференциала в единице, что очевидно. Единственность следует из того, что $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$ порождает как H, так и любую другую связную виртуальную подгруппу Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$.

В случае комплексной группы Ли, теорема следует из следующего факта, который является следствием теоремы Нюландера-Ниренберга .

Лемма 4.12. Пусть M – комплексное многообразие и N – такое погруженное вещественное подмногообразие, что для любой точки $n \in N$ касательное пространство T_nN является комплексным подпространством T_nM. Тогда N – комплексное погруженное подмногообразие многообразия M.

Действительно, комплексная структура на G индуцирует почти комплексную структуру на G и H (4.27). Далее, из Теоремы 4.28 следует, что почти комплексная структура на H интегрируема, то есть H является комплексным многообразием. Более того, так как почти комплексная структура на H индуцирована с G, то погружение

$$i : H \to G$$

является голоморфным отображением, что и требовалось доказать.

□

4.5. **Вторая теорема Ли.**

Теорема 4.13 (Вторая теорема Ли)**.** Если G_1 – связна и $\pi_1(G_1) = \{e\}$, то существует взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \iff Hom(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2), \varphi \mapsto d_e\varphi$$

Доказательство. Пусть φ – гомоморфизм алгебр Ли. Рассмотрим группу Ли $G_1 \times G_2$ и её алгебру Ли $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

Пусть $\mathfrak{h} = \{(x, \varphi(x)) \,|\, x \in \mathfrak{g}_1\}$. Очевидно, что $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. По первой теореме Ли существует связная виртуальная подгруппа H группы Ли $G_1 \times G_2$ с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Рассмотрим отображение $i : H \to G_1 \times G_2$ – вложение виртуальной подгруппы в $G_1 \times G_2$. Рассмотрим также проекции $p_1 : G_1 \times G_2 \to G_1, (g_1, g_2) \to g_1$ и $p_2 : G_1 \times G_2 \to G_2, (g_1, g_2) \to g_2$. Отображение $f := p_1 \circ i : H \to G_1$ – это гомоморфизм групп Ли такой, что $d_e f = d_e p_1 \circ d_e i = \mathrm{id}$. Это означает, что f – накрытие. Но так как группа Ли G_1 односвязна, то f – изоморфизм. Отсюда $g := p_2 \circ i \circ f^{-1} : H \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли. При этом $d_e g = d_e p_2 \circ d_e i \circ d_e f^{-1} = \varphi$. Таким образом отображение g – это поднятие гомоморфизма алгебр Ли φ. □

4.6. **Группа автоморфизмов односвязной группы Ли.** Из второй теоремы Ли следует, что для односвязной группы Ли имеется естественная биекция между $Aut(G) = \mathrm{Hom}(G, G)$ и $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Согласно теореме **??** $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ является группой Ли. Это означает, что на $\mathrm{Aut}(G)$ имеется естественная структура группы Ли.

4.7. **Третья теорема Ли.** Для доказательства следующей теоремы мы будем пользоваться теоремой Адо без доказательства.

Теорема 4.14 (Адо)**.** Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ для некоторого n.

Пример 4.15. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли такая, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, [x, y] = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\} = 0$. Тогда

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x \mapsto [x, \cdot],$$

является вложением алгебр Ли.

Теорема 4.16. (Третья теорема Ли) Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует единственная односвязная группа Ли $\tilde{G}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Любая другая группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ является фактором $\tilde{G}/\Gamma$, где Γ – некоторая дискретная подгруппа центра $Z(\tilde{G})$ группы Ли $\tilde{G}$.

Доказательство. Существование некоторой группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ следует из первой теоремы Ли, применённой ко вложению $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Из Теоремы 4.3 следует, что односвязная группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ – существует. Из второй теоремы Ли следует, что односвязная группа $\tilde{G}$ с заданной алгеброй Ли единственна. Пользуясь Теоремой 4.3 получаем последнее утверждение теоремы. □

Вторая и третью теорему Ли можно сформулировать следующим образом:

Следствие 4.17. Категория связных односвязных групп Ли эквивалентна категории алгебр Ли.

Аппендикс. Топология. Фундаментальная группа и накрытия.

Определение 4.18. Подмножество A топологического пространства X называется локально-замкнутым, если для любой $x \in A$ существует окрестность $x \ni U$ такая, что $U \cap A$ замкнуто в U.

Предложение 4.19. Пусть N – вложенное подмногообразие многообразия M. Тогда N открыто в своем замыкании $\mathrm{cl}_M(N)$.

Доказательство. Вспомним, что N – локально-замкнутое подмножество многообразия M. Это означает, что для любой точки $x \in N$ существует открытая окрестность $U \subset G$ такая, что $U \cap N$ замкнуто в U. Мы утверждаем, что $U \cap N$ открыто в $\mathrm{cl}_M N$, откуда следует требуемое утверждение. Действительно, так как $U \cap N$ замкнуто в N, то

$$U \cap N = \mathrm{cl}_U(U \cap N) = U \cap \mathrm{cl}_M N.$$

Последнее утверждение следует из следующих включений. Включение

$$\mathrm{cl}_U(U \cap H) \subset U \cap \mathrm{cl}_G U$$

очевидно. Для доказательства обратного включения выберем $x \in U \cap \mathrm{cl}_G U$. Из определения замыкания следует, что для любой открытой окрестности $x \in \tilde{U} \subset G$ верно, что $\tilde{U} \cap H \neq \emptyset$. Нам же нужно доказать, что для любой открытой (в U) окрестности $x \in \hat{U} \subset U$ верно, что

$$\hat{U} \cap (U \cap H) \neq \emptyset$$

Так как U открыто в G, то $\hat{U} \cap U$ тоже открытая в G окрестность, содержащая x, откуда следует требуемое.

Предложение 4.20. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно, тогда и только тогда когда $\Gamma = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subset X \times Y$ – замкнуто.

Определение 4.21. Пусть X, Y – топологические пространства. Накрытием $p : Y \to X$ называется сюръективное непрерывное отображение такое, что для любой $x \in X$ существует окрестность $x \in U$ что $p^{-1}(U) = \bigsqcup_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \subset Y$ – открыты, и ограничение p на V_α – гомеоморфизм.

Определение 4.22. Пусть X – топологическое пространство. Универсальное накрытие, это накрытие $p : Y \to X$, Y – односвязное (то есть линейно-связное с тривиальной фундаментальной группой) пространство

Теорема 4.23.
(1) Пусть $X, \tilde{X}, Y$ – топологические пространства, Y – локально линейно связно, $\tilde{X}$ – линейно связно, $x_0 \in X, \tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ и $p : \tilde{X} \to X$ – накрытие, $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Пусть $f : Y \to X$ – непрерывное отображение, $f(y_0) = x_0$ и $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$. Тогда существует единственное отображение $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ такое, что $p \circ \tilde{f} = f$ и $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.
(2) Пусть X, Y – топологические пространства, Y – локально линейно связно и $p_1 : \tilde{X} \to X, p_2 : \tilde{Y} \to Y$ универсальные накрытия. Пусть $f : X \to Y$, $f(x_0) = y_0$ – непрерывные отображения и $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(Y, y_0)$. Пусть $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}, \tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ и $f(p_1(\tilde{x}_0)) = p_2(\tilde{y}_0)$. Тогда существует единственное непрерывное отображение $F : X \to Y$ такое, что $F \circ p_1 = p_2 \circ F$ и $F(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$.

Определение 4.24. Автоморфизм накрытия $p : Y \to X$ это такой гомеоморфизм $f : Y \to Y$, что $p \circ f = p$.

Ясно, что автоморфизмы накрытия образуют группу.

Определение 4.25. Пусть Y – линейно связно, $p : Y \to X$ – накрытие, $p(y_0) = x_0$. Накрытие называется регулярным, если $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ – нормальная подгруппа $\pi_1(X, x_0)$.

Предложение 4.26. Группа автоморфизмов регулярного накрытия $p : Y \to X$, $p(y_0) = x_0$ антиизоморфна $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(Y, y_0))$

□

Определение 4.27. (не вполне строгое) Пусть M – вещественное многообразие. Почти комплексной структурой на M называется набор операторов $J(x) : T_xM \to T_xM$ таких, что $J(x)^2 = -1$ для любой $x \in M$ и J гладко зависит от точки $x \in M$.

Заметим, что комплексное многообразие автоматически имеет почти комплексную структуру – оператор умножения на i в каждом касательном пространстве.

Теорема 4.28 (Теорема Нилендера-Нюренберга)**.** Пусть (M, J) – вещественное многообразие с почти комплексной структурой. Тогда M является комплексным многообразием тогда и только тогда, когда тензор Ниенхауса

$$N_J(X, Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

равен нулю для любых векторных полей X, Y. Более того, структура комплексного многообразия на M, совместимая с J – единственна.