Листок 1, 10 февраля 2025 г.

Задача 1. Пусть $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$. Пусть $h(x) \in \overline{\mathbb{K}}[x]$ – НОД многочленов $f(x), g(x)$, рассмотренных как многочлены над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{K}}$. Докажите, что $h(x) \in \mathbb{K}[x]$.

Задача 2. Докажите, что если расширение $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ сепарабельно и чисто несепаребельно, то $\mathbb{L} = \mathbb{K}$.

Задача 3. Докажите, что любое конечное поле совершенно, то есть любое его алгебраическое расширение сепарабельно.

Задача 4. Докажите, что если расширение $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ нормально, то расширение $\mathbb{L}^{\mathrm{sep}}/\mathbb{K}$ нормально.

Задача 5. Докажите, что расширение $\mathbb{F}_p(x, y)/\mathbb{F}_p(x^p, y^p)$ чисто несепарабельно; проверьте, что $[\mathbb{F}_p(x, y) : \mathbb{F}_p(x^p, y^p)] = p^2$; убедитесь, что существует бесконечное количество промежуточных полей $\mathbb{K}$ таких, что

$$\mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subset \mathbb{K}] \subset \mathbb{F}_p(x, y).$$

Задача 6. (Теорема о примитивном элементе) Пусть $\mathbb{K}$ – бесконечное поле, и $\mathbb{K}(\alpha, \beta)/\mathbb{K}$ – сепарабельное расширение, причем $[\mathbb{K}(\alpha, \beta) : \mathbb{K}] = n$ и $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}(\alpha, \beta)/\mathbb{K}) = G$. Докажите, что

1. существует элемент $\alpha \in \mathbb{K}$ такой, что $|G(\alpha + c\beta)| = n$, то есть G-орбита $G(\alpha + c\beta)$ элемента $\alpha + c\beta$ содержит ровно n элементов,
2. если $|G(\alpha + c\beta)| = n$, то $[\mathbb{K}(\alpha + c\beta) : \mathbb{K}]_{\mathrm{sep}} \geqslant n$,
3. если $|G(\alpha + c\beta)| = n$, то $\mathbb{K}(\alpha + c\beta) = \mathbb{K}(\alpha, \beta)$,
4. если $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ конечно и сепарабельно, то $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$.