Листок 5

Задача 5.1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такая функция, что $f(x+y) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

а) Докажите, что если f непрерывна, то либо для всех x выполнено $f(x) = a^x$, где $a > 0$, либо $f(x) = 0$.

б) Опишите замыкание графика f, если f разрывна.

Задача 5.2.

а) Пусть p — простое число. Докажите, что ряд для e^x сходится при $|x|_p < 1$, если $p > 2$.

б) Докажите, что при $x \in \mathbb{Z}_p$ последовательность x^{p^n} сходится и заключите, что для любого целого a в $\mathbb{Z}_p$ найдется w такое, что $w^p = w$ и $w \equiv a \pmod p$.

Задача 5.3. Опишите все квадраты в $\mathbb{Z}_7$ и в $\mathbb{Z}_2$. То есть все такие x в указанных кольцах, для которых существует y из того же кольца с условием $y^2 = x$.

Задача 5.4. Пусть c_{00} — пространство всех финитных последовательностей, то есть таких $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, что $x_n = 0$ для достаточно большого n. Введём на c_{00} норму $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$. Опишите пополнение c_{00} по этой норме.

Задача 5.5. а) Докажите, что для любого метрического пространства M существует банахово пространство X и изометрическое отображение $f : M \to X$.

б) Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если оно имеет счётное всюду плотное множество. Докажите, что для сепарабельного M в качестве X можно взять пространство ℓ^∞ ограниченных последовательностей с sup-нормой.

Задача 5.6. а) Пусть M — полное метрическое пространство и $f : M \to M$ таково, что существует $\lambda < 1$ с $\rho(f(x), f(y)) \le \lambda \rho(x, y)$ для всех $x, y \in M$. Докажите, что существует и единственна такая точка $x \in M$, что $f(x) = x$, то есть у f есть единственная неподвижная точка.

б) Пусть M — компактное метрическое пространство, $f : M \to M$ и $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ при $x \ne y$. Докажите, что у f есть единственная неподвижная точка. Верно ли это для некомпактного M?

Задача 5.7. (формула Стирлинга без явной константы)

а) Пусть $f(x) = x \ln x - x$. Докажите, что при натуральном $n > 1$ выполнено $\ln n = f(n) - f(n-1) + \frac{1}{2n} + x_n$, где $\frac{1}{6n^2} \le x_n \le \frac{1}{6(n-1)^2}$.

б) Докажите, что существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}\,(n/e)^n}{n!}$$

в) Найдите асимптотическую формулу для $\frac{n!(64n)!}{(49n)!(16n)!}$

Задача 5.8. Докажите, что существует такая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(f(x)) = e^x$ для всех x.

Задача 5.9. Существуют ли гладкие $f(x)$ и $g(x)$ такие, что их ряды Тейлора в $x = 0$ совпадают, но $f(x) \ne g(x)$ при $x \ne 0$?

Задача 5.10*. Сходится ли последовательность $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin(x_n)$? Если да, то найдите её предел s и оцените $|x_n - s|$ для больших n.