КонфИГурАцИонныЕ простр Анст ВА

ФЕДОР ВЫЛЕГЖАНИН

но у людей одни и те же бессмысленные лица
отличаются только цифры в геопозиции

он юн

Записки лекций спецкурса в НМУ (весна 2026), версия от 8 мая. Об ошибках пишите: @vylegf или vylegf@gmail.com.

Содержание

Анонс. Пусть X — топологическое пространство, $k \geq 0$.
Мы будем заниматься алгебраической топологией *конфигурационных пространств*

$$\mathrm{Conf}_k(X) = F(X,k) := \{k \text{ различных точек в } X \text{ с учётом порядка}\} = \{(x_1,\dots,x_k) \in X^k : \ x_i \neq x_j, \ i \neq j\},$$
$$C_k(X) = B(X,k) := \{k \text{ различных точек в } X \text{ без учёта порядка}\} = \mathrm{Conf}_k(X)/\mathfrak{S}_k.$$

(F — первая буква в фамилии Fadell, а B — первая буква в слове braid.) Вот несколько геометрических конструкций, которые приводят к интересным алгебраическим сюжетам.

- Группы (крашеных[1]) кос — это $\mathrm{PBr}_k := \pi_1(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^2))$ и $\mathrm{Br}_k := \pi_1(C_k(\mathbb{R}^2))$; расширение $1 \to \mathrm{PBr}_k \to \mathrm{Br}_k \to \mathfrak{S}_k \to 1$ соответствует накрытию $\mathfrak{S}_k \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^2) \to C_k(\mathbb{R}^2)$.
- Можно забыть про часть точек: подмножеству $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1,\dots,n\}$ сопоставим отображение $pr_I : \mathrm{Conf}_n(X) \to \mathrm{Conf}_k(X)$. (Это инструмент для вычислений.)
- Если $X = M^n$ — многообразие, то можно “подставлять несколько точек вместо одной”: возникают, грубо говоря, отображения $\circ_j : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Conf}_\ell(M) \to \mathrm{Conf}_{k+\ell-1}(M)$, $j = 1,\dots,\ell$. (Строго определим позже; это связано с действием *операды маленьких дисков*.)
- Если M — некомпактное многообразие, то можно “добавлять точку вблизи края”; возникают стабилизирующие отображения $\mathrm{Conf}_k(M) \to \mathrm{Conf}_{k+1}(M)$, $C_k(M) \to C_{k+1}(M)$. (Это наука о *гомологической стабильности*.)
- Можно рассматривать $\mathcal{C}(X;Y)$ — конфигурации точек *с метками* из вспомогательного пространства $(Y,*)$ с отмеченной точкой (точка исчезает из конфигурации, если метка равна $*$). Пример: неразличимые юниты в компьютерной игре (которым нельзя сталкиваться), и здоровье в качестве метки из $(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0)$. Вариант (игра Agar.io): юнитам можно

[1] группа (крашеных) кос = (pure) braid group

сталкиваться, при этом здоровье складывается. То есть, $(Y, *)$ заменяется на топологический моноид.

Литература: обзор Каллела [Kal25] и цитируемые там статьи; записки лекций Кнудсена [Knu18].

1. Элементарная топология конф. пространств (9 февраля)

Мы всегда будем считать, что X хаусдорфово, линейно связно, локально компактно. Обозначения: $\cong$ — гомеоморфизм, $\simeq$ — гомотопическая эквивалентность (ГЭ).

1.1. **Примеры и наблюдения.**

(1) $\mathrm{Conf}_0(X) = C_0(X) = \mathrm{pt}$, $\mathrm{Conf}_1(X) = C_1(X) = X$ для любого X.
(2) $\mathrm{Conf}_k(\varnothing) = C_k(\varnothing) = \varnothing$ при $k \geq 1$; $\mathrm{Conf}_k(\mathrm{pt}) = C_k(\mathrm{pt}) = \varnothing$ при $k \geq 2$.
(3) Задача: $\mathfrak{S}_k \curvearrowright \mathrm{Conf}_k(X)$ свободно, и $\mathrm{Conf}_k(X) \to C_k(X)$ — накрытие со слоем $\mathfrak{S}_k$.
(4) Если M — (гладкое, алгебраическое, квазипроективное...) многообразие, то $\mathrm{Conf}_k(M)$ и $C_k(M)$ — тоже. Они некомпактны при $k > 1$.
(5) $C_k(X \sqcup Y) \cong \bigsqcup_{k=a+b} C_a(X) \times C_b(Y)$. Пространство $\mathrm{Conf}_k(X \sqcup Y)$ тоже разбивается в несвязное объединение, но чуть сложнее (задача: разобраться, как).
(6) $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq S^{n-1}$; ГЭ — это *отображение Гаусса*

$$\gamma : \mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x-y}{||x-y||}.$$

Оно $\mathfrak{S}_2$-эквивариантно, поэтому $C_2(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$.
Как видно, $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^n) \not\simeq \mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^m)$ при $n \neq m$, хотя $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$.
(7) Любой набор различных точек на прямой можно однозначно упорядочить, поэтому

$$C_k(\mathbb{R}) \cong \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ x_1 < \cdots < x_k\} \cong \mathbb{R}^k \simeq \mathrm{pt},$$

и $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}) \to C_k(\mathbb{R})$ — это тривиальное накрытие $\mathbb{R}^k \times \mathfrak{S}_k \to \mathbb{R}^k$. Иногда удобнее использовать отождествление $C_k((0,1)) \cong \mathring{\Delta}^{k-1} = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R} : \ t_i > 0, \ \sum t_i = 1\}$. Этот гомеоморфизм $[0,1]^k \supset \mathrm{Conf}_k((0,1)) \cong \mathfrak{S}_k \times \mathring{\Delta}^{k-1}$ — разбиение куба на $k!$ симплексов.[2]
(8) Пусть теперь $n \gg 0$. Заметим:

$$\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \{\text{линейные подпространства } \{x_i = x_j\} \text{ коразмерности } n\},$$

поэтому $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ $(n-2)$-связно[3]. В пределе, $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^\infty)$ стягиваемо, поэтому

$$\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^\infty) = E\mathfrak{S}_k, \quad C_k(\mathbb{R}^\infty) = B\mathfrak{S}_k := K(\mathfrak{S}_k, 1),$$

то есть, $C_k(\mathbb{R}^\infty)$ классифицирует k-листные накрытия (а $C_k(\mathbb{R}^n)$ классифицирует k-листные накрытия[4]над Y, $\dim Y \leq n-3$). Геометрическая конструкция: пусть $p : E \to Y$ — k-листное накрытие; возникает отображение $Y \to C_k(E), y \mapsto [p^{-1}(y)]$. Вложим теперь E в $\mathbb{R}^n$ при $n \gg 0$; получим искомое классифицирующее отображение $Y \to C_k(\mathbb{R}^n) \to C_k(\mathbb{R}^\infty)$.

1.2. **Функториальность.**

В примере (8) мы неявно пользовались функториальностью $C_k(-)$ относительно вложений. Инъективность существенна: неинъективное отображение $X \to Y$ склеивает различные точки и не задаёт даже отображения $\mathrm{Conf}_2(X) \to \mathrm{Conf}_2(Y)$.

Предложение 1.1. (1) *Инъективное непрерывное отображение $f : X \to Y$ индуцирует (инъективное) $\mathfrak{S}_k$-эквивариантное отображение* $\mathrm{Conf}_k(f) : \mathrm{Conf}_k(X) \to \mathrm{Conf}_k(Y)$ *и (инъективное) отображение $C_k(f) : C_k(X) \to C_k(Y)$.*
(2) *Если $f : X \to Y$ — открытое вложение, то* $\mathrm{Conf}_k(f)$, $C_k(f)$ *— тоже.*
(3) *Если $f_0, f_1 : X \to Y$ монотопны[5], то индуцированные отображения* $\mathrm{Conf}_k(X) \to \mathrm{Conf}_k(Y)$, $C_k(X) \to C_k(Y)$ *монотопны.*
(4) *Если $f : X \to Y$ — монотопическая эквивалентность, то* $\mathrm{Conf}_k(f)$, $C_k(f)$ *— монотопические эквивалентности. В частности,* $\mathrm{Conf}_k(X) \simeq \mathrm{Conf}_k(Y)$, $C_k(X) \simeq C_k(Y)$.

Доказательство. Покоординатно. □

[2] Спасибо А.Рябичеву за этот комментарий!

[3] Можно это доказать по лемме Сарда, можно через двойственность Александера.

[4] Их столько же, сколько главных $\mathfrak{S}_k$-расслоений. Универсальное главное $\mathfrak{S}_k$-расслоение — это $\mathrm{Conf}_k(X) \to C_k(X)$, а универсальное k-листное накрытие — $\{(x, v) \in X \times C_k(X) : x \in v\} \to C_k(X)$, $X = \mathbb{R}^\infty$.

[5] гомотопны, причём все промежуточные отображения $f_t : X \to Y$ инъективны. Это нестандартное понятие!

1.3. **Случай многообразий.**

Предложение 1.2. *Пусть M — многообразие с краем. Тогда M и $M \setminus \partial M$ монотопически эквивалентны. Следовательно,* $\mathrm{Conf}_k(M \setminus \partial M) \simeq \mathrm{Conf}_k(M)$, $C_k(M \setminus \partial M) \simeq C_k(M)$.

Доказательство. Без ограничения общности, M имеет воротник $U \cong \partial M \times (0, 1]$. Ретракция $r : M \to M \setminus \partial M$, $r(x, t) := (x, t/2)$ (сжатие воротника в два раза) и вложение $i : M \setminus \partial M \to M$ задают монотопическую эквивалентность между M и $M \setminus \partial M$. □

Предложение 1.3. *Пусть M — n-мерное многообразие, $n \geq 3$. Тогда $\pi_1(\mathrm{Conf}_k(M)) \cong \pi_1(M)^{\times n}$, а $\pi_1(C_k(M)) = \pi_1(M) \wr \mathfrak{S}_k := \pi_1(M)^{\times k} \rtimes \mathfrak{S}_k$ — сплетённое произведение*[6].

В частности: если M односвязно, то $\mathrm{Conf}_k(M)$ односвязно.

Доказательство. $\mathrm{Conf}_k(M) = M^{\times k} \setminus \Delta_{\mathrm{fat}}$, где *толстая диагональ* $\Delta_{\mathrm{fat}} = \bigcup_{i \neq j} \{(m_1, \dots, m_n) : m_i = m_j\}$ — объединение подмногообразий коразмерности n. Поэтому фундаментальная группа не меняется (более того, $\pi_i(\mathrm{Conf}_k(M)) = \pi_i(M^{\times k}) = \pi_i(M)^{\times k}$ при всех $i \leq n - 2$). □

Теорема 1.4 (Fadell, Neuwirth, 1962)**.** *Пусть M^n — многообразие без края, $n \geq 2$.*

(1) *Для всех $0 < i < k$ имеем локально тривиальное расслоение*

$$\mathrm{Conf}_{k-i}(M \setminus \{x_1, \dots, x_i\}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Conf}_k(M) \xrightarrow{p} \mathrm{Conf}_i(M),$$
$$p(x_1, \dots, x_k) := (x_1, \dots, x_i), \quad \iota(y_{i+1}, \dots, y_k) := (x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_k).$$

В частности, имеем расслоения

$$\mathrm{Conf}_{k-1}(M \setminus \{x_1\}) \to \mathrm{Conf}_k(M) \to M, \tag{1.1}$$

$$M \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\} \to \mathrm{Conf}_k(M) \to \mathrm{Conf}_{k-1}(M). \tag{1.2}$$

(2) *Пусть $M \cong N \setminus \{\mathrm{pt}\}$, где N — многообразие. Тогда p имеет сечение.*

Мы докажем (1.1), то есть случай $i = 1$. Общий случай аналогичен, но объяснять дольше.

Доказательство. (1) Выберем евклидову окрестность $x \in U \subset M, \overline{U} \cong D^n$. Легко построить[7] отображение $\tau : U \times M \to M$ со свойством: для любого $y \in M$ отображение $\tau(y, -) : M \to M$ — гомеоморфизм, неподвижный вне U и переводящий y в x. Тогда расслоение над U можно тривиализовать так:

$$\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathrm{Conf}_{k-1}(M \setminus \{x_1\}), \quad \varphi(y_1, z_2, \dots, z_k) \mapsto (y_1, \tau(y_1, z_2), \dots, \tau(y_1, z_k)).$$

(2) Пусть $M = N \setminus \{x_0\}$, и $x_0 \in U \subset N$ — евклидова окрестность. Возникает функция радиуса $|| - || : U \to [0, 1]$. выберем различные точки $y_2, \dots, y_k \in U$, $||y_i|| = 1/2$. Искомое сечение:

$$s : M \to \mathrm{Conf}_k(M), \quad s(x) := \begin{cases} (x, y_2, \dots, y_k), & x \notin U; \\ (x, ||x||y_2, \dots, ||x||y_k), & x \in U. \end{cases}$$ □

Лемма 1.5. *Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение, и p имеет гомотопическое*[8] *сечение. Тогда*

$$\pi_1(E) \cong \pi_1(F) \rtimes \pi_1(B); \quad \pi_i(E) \cong \pi_i(F) \oplus \pi_i(B),\ i \geq 2.$$

Доказательство. Точная последовательность гомотопических групп распадается на короткие точные последовательности, имеющие сечения — то есть, на полупрямые произведения. □

Следствие 1.6. (1) *Пусть $n \geq 3$. Тогда $\pi_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \cong \bigoplus_{r=1}^{k-1} \pi_*((S^{n-1})^{\vee r})$.*

(2) $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^2)$ *асферично, и является классифицирующим пространством группы крашеных кос:* $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^2) = K(\mathrm{PBr}_k, 1)$. *Следовательно,* $C_k(\mathbb{R}^2) = K(\mathrm{Br}_k, 1)$.

(3) *Более общо: пусть $S \neq S^2, \mathbb{R}P^2$ — связная поверхность. Тогда пространства* $\mathrm{Conf}_k(S)$ *и* $C_k(S)$ *асферичны,* $\mathrm{Conf}_k(S) = K(\mathrm{PBr}_k(S), 1)$, $C_k(S) = K(\mathrm{Br}_k(S), 1)$. *В частности, эти группы не имеют элементов кручения.*

Доказательство. (1) Расслоение (1.2) имеет вид $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\} \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Conf}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$ и имеет сечение; поэтому $\pi_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \cong \pi_*(\mathrm{Conf}_{k-1}(\mathbb{R}^n)) \oplus \pi_*((S^{n-1})^{\vee k-1})$.

(2) Частный случай (3).

---

[6] Более общо: для группы G и подгруппы $A \subset \mathfrak{S}_k$ обозначаем $G \wr A := G^{\times k} \rtimes A \subset G^{\times k} \rtimes \mathfrak{S}_k$.

[7] Это лёгкое усиление известного факта “многообразия однородны” (т.е. действие $\mathrm{Homeo}(M) \curvearrowright M$ транзитивно).

[8] То есть, существует $s : B \to E$ такое, что $p \circ s \sim \mathrm{id}_B$.

(3) Из условия следует, что S и $S \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ асферичны, поэтому асферичность получается из (1.2) по индукции. Кручения нет, потому что классифицирующее пространство конечномерно.[9] $\square$

При $n = 2$ получаем: (1.2) — это расслоение асферичных пространств $(S^1)^{\vee k} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_k\} \to \mathrm{Conf}_{k+1}(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^2)$; это даёт полупрямые расширения

$$1 \to \mathbb{Z}^{*k} \to \mathrm{PBr}_{k+1} \to \mathrm{PBr}_k \to 1, \quad \mathrm{PBr}_{k+1} \cong (\mathbb{Z}^{*k}) \rtimes \mathrm{PBr}_k$$

(проекция — это выкидывание одной из нитей).

1.4. Теорема Лере–Хирша.

Мы применим *теорему Леré–Хирша* к расслоению

$$(S^{n-1})^{\vee k-1} \xrightarrow{\iota} \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Conf}_{k-1}(\mathbb{R}^n) \tag{1.3}$$

и вычислим $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$ (вычисление Арнольда[10] при $n = 2$ и Коэна при $n > 2$).

Теорема 1.7 (Leray, Hirsch; [Hatcher15, Theorem 4D.1])**.** *Пусть $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение, $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей, и выполнены условия:*

- *B и F линейно связны;*
- *$H_*(F; \mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль конечного типа[11];*
- *Отображение $\iota^* : H^*(E; \mathbf{k}) \to H^*(F; \mathbf{k})$ сюръективно.*

Тогда $H^*(E; \mathbf{k}) \simeq H^*(F; \mathbf{k}) \otimes H^*(B; \mathbf{k})$ как правый $H^*(B; \mathbf{k})$-модуль.

Более "координатно": в условиях теоремы, для любого $j \geq 1$ модуль $H^j(F; \mathbf{k})$ имеет конечный базис $\{x_\beta\}$, и $x_\beta = \iota^*(y_\beta)$ для некоторых $y_\beta \in H^j(E; \mathbf{k})$. Тогда изоморфизм можно задать отображением

$$H^*(F) \otimes H^*(B) \to H^*(E), \quad \sum_\beta x_\beta \otimes b_\beta \mapsto \sum_\beta y_\beta \cdot p^*(b_\beta). \quad \square$$

Замечание 1.8. (1) $H^*(E) \simeq H^*(F) \otimes H^*(B)$ — не обязательно изоморфизм колец.

(2) Действие $\pi_1(B) \curvearrowright \mathrm{Im}(\iota^*) \subset H^*(F; \mathbf{k})$ тривиально; поэтому из условия теоремы следует, что $\pi_1(B) \curvearrowright H^*(F; \mathbf{k})$ тривиально. (Дальше её можно доказать через с.п. Серра).

Пусть $H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cdot \alpha$ — стандартная образующая, $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. Рассмотрим гауссовы отображения

$$\gamma_{ij} : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}, \ (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \frac{x_i - x_j}{||x_i - x_j||}$$

и соответствующие классы

$$\alpha_{ij} := \gamma_{ij}^*(\alpha) \in H^{n-1}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}).$$

Лемма 1.9. *Классы $\{\iota^*(\alpha_{ij}) : \ 1 \leq i, j \leq k\}$ порождают группу $H^{n-1}((S^{n-1})^{\vee k-1}) \cong \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{Z} \cdot \alpha_i$. Более точно, $\iota^*(\alpha_{ij}) = \pm\alpha_i \pm \alpha_j$, где $\alpha_k = 0$.*

Доказательство. Задача. $\square$

Предложение 1.10. *Теорема Лере–Хирша применима к (1.3) при всех $n \geq 2$. Следовательно,*

(1) *$H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) \simeq H^*((S^{n-1})^{\vee k-1}; \mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathrm{Conf}_{k-1}(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$ как $H^*(\mathrm{Conf}_{k-1}(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$-модуль;*
(2) *Аддитивно, $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \simeq \bigotimes_{r=1}^{k-1} H^*((S^{n-1})^{\vee r}; \mathbb{Z})$;*
(3) *таким образом,*

$$H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{k!}, \quad \sum_{i \geq 0} \beta_i(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \cdot t^i = \prod_{r=1}^{k-1} (1 + rt^{n-1}) \in \mathbb{Z}[[t]];$$

$\beta_{(n-1)j}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = \left[{k \atop k-j}\right]$ — числа Стирлинга первого рода.

(4) *классы $\alpha_{ij} \in H^{n-1}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$ порождают $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$ как кольцо.*

---

[9] Пусть $\mathbb{Z}/n \subset G$ и BG конечномерно. Тогда EG конечномерно, и на нём свободно действует $\mathbb{Z}/n$. Отсюда $B\mathbb{Z}/n$ конечномерно. Но $H^{2i}(B\mathbb{Z}/n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n$ при всех $i \geq 1$, противоречие.

[10] Арнольда интересовали группы кос: $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^2)) \cong \mathrm{H}^*(\mathrm{PBr}_k)$.

[11] То есть, все модули $H^j(F; \mathbf{k})$ конечно порождены.

Доказательство. Отсутствие кручения в $H^*(F;\mathbb{Z})$ очевидно, а сюръективность ι^* доказана выше. Значит, теорема применима. Пункт (1) — это теорема Лере–Хирша; (2) и (3) следуют из (1) по индукции. Наконец, (4) получаем по индукции из Лере–Хирша (здесь важно, что $p^*(\alpha_{ij}) = \alpha_{ij}$, и для базиса $\{x_\beta\} = \{\alpha_j\} \subset H^*(F)$ можно взять прообразы $\{y_\beta\} = \{\pm\alpha_{jk}\} \subset H^*(E)$). □

2. Когомологии $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ (16 февраля)

2.1. **Кольцо $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$.** При $1 \le i, j \le k$, $i \ne j$ мы ввели гауссовы отображения $\gamma_{ij} : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}$ и классы $\alpha_{ij} := \gamma_{ij}^*(\alpha) \in H^{n-1}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z})$.

Удобна графическая запись: произведения $\alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2}\dots\alpha_{i_Nj_N}$ соответствуют ориентированным графам (без петель, с кратными рёбрами) на множестве вершин $\{1,\dots,k\}$. (Точнее, надо ещё упорядочить множители лексикографически, но от порядка зависит только знак произведения.)

Определение 2.1. *Длинный граф* на множестве из k вершин — это любой ориентированный граф следующего вида: каждая компонента связности имеет вид $i_1 \to i_2 \to \dots \to i_s$, где $s \ge 1$ и $i_1 = \min\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$.

Мы покажем, что соответствующие классы — аддитивный базис для $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z})$.

Лемма 2.2. *Пусть $g_{k,s}$ — число длинных графов на k вершинах с s рёбрами. Тогда $g_{k,s} = \beta_{(n-1)s}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$.*

Доказательство. Длинный граф на вершинах $\{1,\dots,k,k+1\}$ с s рёбрами можно получить из длинного графа на вершинах $\{1,\dots,k\}$ двумя способами: или добавить изолированную вершину в граф с s рёбрами, или вставить вершину $k+1$ в любое место в каждую из компонент графа с $s-1$ ребром. Вставить можно после любой вершины, то есть на любое из k мест. Значит, $g_{k+1,s} = g_{k,s} + k \cdot g_{k,s-1}$.

Теперь обозначим $G_k(t) = \sum_s g_{k,s}t^s \in \mathbb{Z}[t]$. Имеем $G_{k+1}(t) = G_k(t) + k \cdot tG_k(t)$, то есть $G_k(t) = (1+t)(1+2t)\dots(1+(k-1)t) = \sum_s \beta_{(n-1)s}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))t^s$. □

Замечание 2.3. Заодно мы проверили, что $\prod(1+jt)$ — производящая функция чисел Стирлинга первого рода. Действительно, $\left[{k \atop k-s}\right]$ определяют как мощность множества

$\{\sigma \in \mathfrak{S}_k \mid \sigma$ — произведение ровно $k-s$ циклов$\} \cong \{$длинные графы с s рёбрами на k вершинах$\}$.

Предложение 2.4. *Классы $\alpha_{ij} \in H^{n-1}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

(2.1) *(1)* $\alpha_{ij}^2 = 0$; *(2)* $\alpha_{ij} = (-1)^n\alpha_{ji}$; *(3) (“соотн. Арнольда”)* $\alpha_{ij}\alpha_{j\ell} + \alpha_{j\ell}\alpha_{\ell i} + \alpha_{\ell i}\alpha_{ij} = 0$.

Доказательство. (1) $\alpha_{ij}^2 = \gamma_{ij}^*(\alpha)^2 = \gamma_{ij}^*(\alpha^2) = 0$, так как $\alpha^2 = 0 \in H^{2(n-1)}(S^{n-1})$.
(2) γ_{ij} и γ_{ji} отличаются на антиподальное отображение S^{n-1}; оно имеет степень $(-1)^n$.
(3) Так как $\alpha_{ij} = p^*(\alpha_{ij})$ для проекций $p : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Conf}_{k'}(\mathbb{R}^n)$, достаточно доказать соотношение $\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12} = 0 \in H^{2(n-1)}(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{R}^n))$.

Мы знаем, что аддитивно $H^*(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{R}^n)) \simeq H^*(S^{n-1};\mathbb{Z}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})$, поэтому $H^{2(n-1)}(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{Z}^2$. Значит, есть какое-то нетривиальное линейное соотношение:
$$N\alpha_{12}\alpha_{23} + N'\alpha_{23}\alpha_{31} + N''\alpha_{31}\alpha_{12} = 0.$$
Циклическая перестановка $(1\,2\,3)$ переводит эти элементы друг в друга, поэтому можно сложить это соотношение со сдвинутыми, и получить $M \cdot (\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12}) = 0$. Соотношение выполнено в группе без кручения, поэтому можно считать[12], что $M = 1$. □

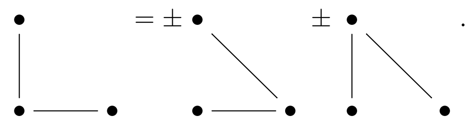
Замечание 2.5. При $n = 2$ можно убедиться (задача), что класс $\alpha_{ij} \in \mathrm{Conf}_2(\mathbb{C})$ представляется дифференциальной формой $\omega_{ij} = d(\log(z_i - z_j))/2\pi i \in \Omega^1_{dR}(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C}$, и соотношение Арнольда выполнено уже на уровне форм: $\omega_{ij} \wedge \omega_{j\ell} + \omega_{j\ell} \wedge \omega_{\ell i} + \omega_{\ell i} \wedge \omega_{ij} = 0$.

Теорема 2.6 (Арнольд, Коэн)**.** *Пусть $k \ge 1$, $n \ge 2$. Рассмотрим градуированно-коммутативную алгебру*
$$A := S(\alpha_{ij} :\ 1 \le i, j \le k,\ i \ne j)/(\textit{соотношения } (2.1)).$$
Тогда
(1) *Классы, соответствующие длинным графам, аддитивно порождают A.*
(2) *Имеем изоморфизм алгебр $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \cong A$.*

[12] Если $M = 0$, то найдутся два линейно независимых соотношения, противоречие. Детали — упражнение.

(3) *Классы, соответствующие длинным графам, образуют аддитивный базис $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$.*

Доказательство. (1) Аддитивно, A порождена классами ориентированных графов с кратными рёбрами; мы хотим выразить их через длинные графы с помощью соотношений (2.1). За счёт соотношений $\alpha_{ij} = \pm\alpha_{ji}$ можно разворачивать рёбра, а за счёт соотношений $\alpha_{ij}^2 = 0$ можно убирать кратные рёбра. Наконец, соотношение Арнольда имеет вид



Среди неизолированных вершин возьмём вершину с наименьшим номером; если у неё степень > 1 — воспользуемся соотношением Арнольда, чтобы уменьшить степень (после этого надо избавиться от кратных рёбер). Так можно свести к случаю, когда её степень равна 1. Если её сосед имеет степень ≥ 2 — повторяем процедуру, и так далее. Так можно превратить любой граф в линейную комбинацию длинных.

(2) По предложению 2.4, соотношения (2.1) выполнены в $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$. Значит, корректно определён гомоморфизм алгебр $\varphi : A \to H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$. Классы α_{ij} порождают $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$ как алгебру (по предложению 1.10), поэтому φ сюръективен. В том же предложении мы посчитали, что $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{Z}^{k!}$. Длинных графов столько же (по лемме 2.2). Значит, вместе с пунктом (1) мы получили цепочку сюръекций $\mathbb{Z}^{k!} \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{Z}^{k!}$. Сюръекция $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$ биективна. Значит, обе стрелки биективны.

(3) Из биективности следует, что длинные графы дают базис в A. □

Лемма 2.7. *Алгоритм, описанный в пункте (1), выражает граф как линейную комбинацию длинных графов <u>с теми же компонентами связности</u>.*

Доказательство. Задача. □

2.2. **Действие симметрической группы.** Опишем действие $\mathfrak{S}_k \curvearrowright H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$. Симметрическая группа переставляет номера точек, то есть индексы у образующих, то есть вершины у графов. Посмотрим на действие на аддитивном базисе, т.е. на длинных графах. После перестановки вершин длинный граф перестанет быть длинным. Но, по лемме 2.7, он превратится в линейную комбинацию длинных графов на том же множестве вершин, что и сдвинутый граф. Значит, мультимножество мощностей компонент связности — инвариант действия. Это мультимножество — *разбиение* $\lambda \vdash k$, то есть набор натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r)$, $\sum \lambda_i = k$. Итак, для каждого разбиения $\lambda \vdash k$ у нас есть $\mathfrak{S}_k$-модуль

$$L_\lambda = \mathbb{Z} \cdot \{\text{длинные графы, соответствующие разбиению } \lambda \vdash k\} \subset H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$$

(более точно, $L_\lambda \subset H^{(n-1)(k-r)}$), и имеем изоморфизм $\mathfrak{S}_k$-модулей $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} L_\lambda$. Крайние случаи: k-элементное разбиение $(1, \ldots, 1) \vdash k$ и одноэлементное разбиение $(k) \vdash k$.

Теперь сведём всё к случаю связных длинных графов, то есть к модулям $L_{(\lambda_i)}$. Конкатенация задаёт линейное отображение $c : \bigotimes_{i=1}^r L_{(\lambda_i)} \to L_\lambda$. Например,

$$L_{(3)} \otimes L_{(3)} \otimes L_{(2)} \to L_{(3\,2\,2)}, \quad (1 \to 2 \to 3) \otimes (1 \to 3 \to 2) \otimes (1 \to 2) \mapsto (1 \to 2 \to 3\ 4 \to 6 \to 5\ 7 \to 8).$$

Замечание 2.8. Это отображение инъективно, переводит базисные элементы в базисные, но не сюръективно. Например, так нельзя получить длинный граф $(1 \to 6 \to 2\ 3 \to 8 \to 4\ 5 \to 7)$.

Какая группа тут действует? Разрешено переставлять вершины внутри каждой компоненты связности, то есть действует группа $\prod_i \mathfrak{S}_{\lambda_i} \subset \mathfrak{S}_k$. Ещё можно переставлять равномощные компоненты (в примере выше — первую и вторую). Получаем действие *юнговской подгруппы*

$$\mathfrak{S}_\lambda := (\text{стабилизатор разложения } \{1, \ldots, k\} = \bigsqcup \Big\{\{1, \ldots, \lambda_1\}, \{\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_1 + \lambda_2\}, \ldots\Big\}$$

при действии $\mathfrak{S}_k$ на множестве всех неупорядоченных разложений множества $\{1, \ldots, k\}) \subset \mathfrak{S}_k$.

Предложение 2.9. $c : \bigotimes_{i=1}^r L_{(\lambda_i)} \to L_\lambda$ *— $\mathfrak{S}_\lambda$-эквивариантное отображение.* □

Пример: если $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$, то $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_r}$. С другой стороны, $\mathfrak{S}_{(a,a)} \cong (\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_a) \rtimes \mathbb{Z}/2$. Общий случай: запишем $\lambda = k \cdot n_k + \cdots + 2 \cdot n_2 + 1 \cdot n_1$, (число s встречается $n_s \geq 0$ раз); тогда

$$\mathfrak{S}_\lambda \cong \prod_s ((\mathfrak{S}_s^{\times n_s}) \rtimes \mathfrak{S}_{n_s}) = \prod_s (\mathfrak{S}_s \wr \mathfrak{S}_{n_s}), \quad |\mathfrak{S}_\lambda| = \prod_i \lambda_i! \cdot \prod_s n_s!\ .$$

Лемма 2.10. $|\mathfrak{S}_\lambda| \cdot \dim(L_\lambda) = k! \prod_{i=1}^r (\lambda_i - 1)!$.

Доказательство. Задача. □

Напоминание из теории представлений: морфизму групп $H \to G$ и H-модулю M сопоставляется *индуцированный* G-модуль $\operatorname{Ind}_H^G(M) := \mathbf{k}[G] \otimes_{\mathbf{k}[H]} M$. Это функтор, сопряжённый к функтору ограничения $M \mapsto M$. То есть, для $\mathbf{k}[H]$-модуля M и $\mathbf{k}[G]$-модуля N имеем

$$\operatorname{Hom}_G(\mathbf{k}[G] \otimes_{\mathbf{k}[H]} M, N) \cong \operatorname{Hom}_H(M, N).$$

Лемма 2.11. *Если $H \to G$ инъективно, то* $\dim \operatorname{Ind}_H^G(M) = |G/H| \cdot \dim M$.

Доказательство. Действительно, $\mathbf{k}[G]$ — свободный $\mathbf{k}[H]$-модуль ранга $|G/H|$. □

Предложение 2.12. *Отображение конкатенации $c : \bigotimes_{i=1}^r L_{(\lambda_i)} \to L_\lambda$ задаёт изоморфизм $\mathfrak{S}_k$-модулей $L_\lambda \cong \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k}(\bigotimes_{i=1}^r L_{(\lambda_i)})$.*

Доказательство. Обозначим $M = \bigotimes_{i=1}^r L_{(\lambda_i)}$. Морфизм $\mathfrak{S}_k$-модулей

$$\overline{c} : \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k}(M) = \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_k] \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_\lambda]} M \to L_\lambda$$

существует из сопряжённости. При этом он имеет вид $\sigma \otimes m \mapsto \sigma \cdot c(m)$. То есть, перестановке $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ и набору связных длинных графов сопоставляется действие перестановки на конкатенации этих графов. Так можно получить любой длинный граф, поэтому $\overline{c}$ сюръективен. Наконец, ранги этих модулей равны по предыдущим двум леммам:

$$\dim \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k} M = |\mathfrak{S}_k/\mathfrak{S}_\lambda| \dim M = \frac{k!}{|\mathfrak{S}_\lambda|} \prod_{i=1}^r (\lambda_i - 1)! = \dim L_\lambda.$$ □

Итак, мы получили изоморфизм $\mathfrak{S}_k$-модулей

$$H^*(\operatorname{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k} \Big(\bigotimes_i L_{(\lambda_i)} \Big). \tag{2.2}$$

2.3. **Рациональные когомологии $C_k(\mathbb{R}^n)$.** Вспомним теорему о трансфере.

Теорема 2.13 ([Hatcher15, Proposition 3G.1])**.** *Пусть $G \to \widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ — регулярное накрытие с конечным слоем. Тогда “сумма всех поднятий симплекса” задаёт естественное цепное отображение $t : C_*(X; \mathbf{k}) \to C_*(\widetilde{X}; \mathbf{k})^G \subset C_*(\widetilde{X}; \mathbf{k})$ такое, что $p_* \circ t = |G| \cdot \mathrm{id}$.*

В частности, если $|G| \in \mathbf{k}^\times$ (число $|G|$ обратимо в кольце $\mathbf{k}$), то естественные отображения $p_* : H_*(\widetilde{X}; \mathbf{k})_G \to H_*(X; \mathbf{k})$, $p^* : H^*(X; \mathbf{k}) \to H^*(\widetilde{X}; \mathbf{k})^G$ — изоморфизмы (обратные к $t/|G|$). □

Поэтому $H^*(\operatorname{Conf}_k(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{S}_k; \mathbb{Q}) \cong H^*(\operatorname{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Q})^{\mathfrak{S}_k}$.

Лемма 2.14. $(L_{(k)})^{\mathfrak{S}_k}$ *— свободный модуль ранга ≤ 1. Более того: если $\mathbb{F}$ — поле характеристики $\neq 2, 3$, то*

$$(L_{(k)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F})^{\mathfrak{S}_k} = \begin{cases} \mathbb{F}, & k = 1; \\ \mathbb{F}, & k = 2, \ n \text{ чётно}; \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Половина доказательства. Рассмотрим подгруппу $S := \{\sigma \in \mathfrak{S}_k : \ \sigma(1) = 1\}$. Тогда модуль $L_{(k)} \simeq \mathbb{Z}^{(k-1)!}$ имеет базис $\{e_\sigma := (1 \to \sigma(2) \to \cdots \to \sigma(k))\}_{\sigma \in S}$. Кроме того, при действии $\mathfrak{S}_k \curvearrowright L_{(k)}$ подгруппа $S \subset \mathfrak{S}_k$ действует перестановкой базисных элементов. Отсюда следует, что любой S-инвариантный вектор в $L_{(k)} \otimes \mathbf{k}$ пропорционален вектору $v = \sum_{\sigma \in S} e_\sigma$. □

Вторую половину докажем потом (через гомологии, а не когомологии).

Лемма 2.15. *Пусть V — $\mathbf{k}[G]$-модуль, причём $|G|$ обратимо в $\mathbf{k}$. Тогда сквозное отображение $f : V^G \to V \to V_G$ из подмодуля инвариантов $V^G = \{v \in V : \ g.v = v, \ \forall g \in G\}$ в модуль коинвариантов $V_G = V/\operatorname{span}(g.v - v : \ v \in V, \ g \in G)$ — изоморфизм.*

Доказательство. По теореме Машке, $V \simeq V^G \oplus C$, поэтому $V_G \simeq (V^G)_G \oplus C_G = V^G \oplus C_G$. Значит, f инъективно. С другой стороны, $t : [v] \mapsto (\sum_{g \in G} gv)/|G|$ — сечение для f. Значит, f сюръективно. □

Итак, $V^G \cong V_G$. Для коинвариантов есть хорошие формулы: $(\bigoplus_i M_i)_G \cong \bigoplus_i (M_i)_G$,

$$(\mathrm{Ind}_H^G(M))_G \cong M_H,\ (M)_{G_1 \rtimes G_2} \cong (M_{G_1})_{G_2},\ (\otimes_i M_i)_{\prod_i G_i} \cong \otimes_i (M_i)_{G_i},\ (V^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n} \cong \mathrm{Sym}^n(V).$$

(Здесь $\mathrm{Sym}(V) \cong \mathbf{k}[V^{even}] \otimes \Lambda[V^{odd}]$ — это свободная *градуированно-коммутативная* алгебра.)

Теорема 2.16. *Пусть $6k!$ обратимо в кольце $\mathbf{k}$ (например, $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$). Тогда*

$$H^*(C_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k}) = \begin{cases} \mathbf{k}, & n \text{ нечётно};\\ \Lambda[y_{n-1}], & n \text{ чётно.}\end{cases}$$

В группе $H^*(C_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$ нет p-кручения при $p > k$.

Эту формулу можно запомнить так: ответ не зависит от k, а при $k = 2$ имеем $C_k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$.

Доказательство. Для краткости пишем $L_{(k)}$ вместо $L_{(k)} \otimes \mathbb{F}$. Из (2.2), теоремы о трансфере и предыдущего абзаца получаем: $H^*(C_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}) \cong H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{F})_{\mathfrak{S}_k} = \bigoplus_{\lambda \vdash k} V_\lambda$, где для разбиения $\lambda = \sum_i \lambda_i = \sum_s n_s \cdot s$ имеем

$$V_\lambda := \Big(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k}(\bigotimes_i L_{(\lambda_i)})\Big)_{\mathfrak{S}_k} \cong \Big(\bigotimes_i L_{(\lambda_i)}\Big)_{\mathfrak{S}_\lambda} \cong \Big(\bigotimes_s L_{(s)}^{\otimes n_s}\Big)_{\prod_s((\mathfrak{S}_s)^{\times n_s} \rtimes \mathfrak{S}_{n_s})} \cong \bigotimes_s (L_{(s)}^{\otimes n_s})_{(\mathfrak{S}_s)^{\times n_s} \rtimes \mathfrak{S}_{n_s}}$$
$$\cong \bigotimes_s \Big((L_{(s)}^{\otimes n_s})_{(\mathfrak{S}_s)^{\times n_s}}\Big)_{\mathfrak{S}_{n_s}} \cong \bigotimes_s \Big(((L_{(s)})_{\mathfrak{S}_s})^{\otimes n_s}\Big)_{\mathfrak{S}_{n_s}} \cong \bigotimes_s \mathrm{Sym}^{n_s}((L_{(s)})_{\mathfrak{S}_s}).$$

Если $n_s > 0$ для некоторого $s \geq 3$, то в тензорном произведении есть нулевой множитель $(L_{(s)})_{\mathfrak{S}_s}$. Значит, достаточно рассмотреть разбиения вида $k = n_2 \cdot 2 + n_1 \cdot 1$. Для них этот модуль имеет вид $\mathrm{Sym}^{n_2}((L_{(2)})_{\mathfrak{S}_2})$. Итак,

$$H^*(C_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}) \cong \mathrm{Sym}^*((L_{(2)})_{\mathfrak{S}_2}) = \begin{cases} \mathbb{F}[(L_{(2)})^{\mathfrak{S}_2}] = 0, & n \text{ нечётно};\\ \Lambda[(L_{(2)})^{\mathfrak{S}_2}] = \Lambda[\mathbb{F} \cdot y_{n-1}], & n \text{ чётно.} \end{cases} \quad \square$$

Замечание 2.17. В частности, $H^*(\mathrm{Br}_k; \mathbb{Q}) = \Lambda[y_1]$, откуда $H^1(\mathrm{Br}_k; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Это согласуется с изоморфизмом $H_1(\mathrm{Br}_k; \mathbb{Z}) \cong (\mathrm{Br}_k)_{ab} \cong \mathbb{Z}$.

2.4. **Структура скрученной коммутативной алгебры на $H^*(\mathrm{Conf}(X))$.** (Это задел на будущее; мы вернёмся к этому сюжету, когда будем обсуждать гомологическую стабильность.) Для произвольного пространства X обозначим $\mathrm{Conf}(X) := \bigsqcup_{k \geq 0} \mathrm{Conf}_k(X)$. Полученный биградуированный модуль $H^*(\mathrm{Conf}(X)) = \bigoplus_{k \geq 0} H^*(\mathrm{Conf}_k(X))$ образует *симметрическую последовательность*, то есть последовательность модулей $\mathfrak{S}_k \curvearrowright H^*(\mathrm{Conf}_k(X))$. Более того, эта симметрическая последовательность обладает структурой *скрученной коммутативной алгебры* (twisted commutative algebra, или TCA).

Эта структура происходит из проекций $\mathrm{Conf}_k(X) \to \mathrm{Conf}_a(X)$, $0 \leq a \leq k$.

Предложение 2.18. *Отображения*

$$s_{a,b} : \mathrm{Conf}_{a+b}(X) \to \mathrm{Conf}_a(X) \times \mathrm{Conf}_b(X), \quad (x_1, \ldots, x_{a+b}) \mapsto ((x_1, \ldots, x_a), (x_{a+1}, \ldots, x_{a+b}))$$

- $\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$*-эквивариантны;*
- коассоциативны*: диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Conf}_{a+b+c}(X) \arrow[r, "s_{a+b,c}"] \arrow[d, "s_{a,b+c}"'] & \mathrm{Conf}_{a+b}(X) \times \mathrm{Conf}_c(X) \arrow[d, "s_{a,b} \times \mathrm{id}"] \\ \mathrm{Conf}_a(X) \times \mathrm{Conf}_{b+c}(X) \arrow[r, "\mathrm{id} \times s_{b,c}"] & \mathrm{Conf}_a(X) \times \mathrm{Conf}_b(X) \times \mathrm{Conf}_c(X) \end{tikzcd}$$

коммутативна;
- коунитальны *(упражнение: понять, что это);*
- блочно коммутативны*: диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Conf}_{a+b}(X) \arrow[r, "s_{a,b}"] \arrow[d, "\tau_{a,b}"'] & \mathrm{Conf}_a(X) \times \mathrm{Conf}_b(X) \arrow[d, "t"] \\ \mathrm{Conf}_{a+b}(X) \arrow[r, "s_{b,a}"] & \mathrm{Conf}_b(X) \times \mathrm{Conf}_a(X) \end{tikzcd}$$

коммутативна (где $\tau_{a,b} \in \mathfrak{S}_{a+b}$ — блочная перестановка, и $t(x,y) = (y,x)$). $\square$

Возникают отображения

$$\mu_{a,b} = s_{a,b}^* : H^*(\mathrm{Conf}_a(X)) \otimes H^*(\mathrm{Conf}_b(X)) \to H^*(\mathrm{Conf}_{a+b}(X)),$$

которые задают $(\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b)$-эквивариантное ассоциативное унитальное и блочно-коммутативное умножение на $H^*(\mathrm{Conf}(X))$. Почему это естественная структура?

Определение 2.19 (Тензорное произведение симметрических последовательностей)**.** Пусть $\mathcal{X} = \{X(k) : \ k \geq 0\}$, $\mathcal{Y} = \{Y(k) : \ k \geq 0\}$ — симметрические последовательности $\mathbf{k}$-модулей (то есть, заданы действия $\mathfrak{S}_k \curvearrowright X(k)$, $\mathfrak{S}_k \curvearrowright Y(k)$). Тогда определена симметрическая последовательность $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$,

$$(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})(k) := \bigoplus_{k=a+b} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b}^{\mathfrak{S}_k} \Big(\mathcal{X}(a) \otimes \mathcal{Y}(b)\Big).$$

Выглядит сложно, но идея простая: ясно, что $(a+b)$-ая компонента должна содержать модуль $\mathcal{X}(a) \otimes \mathcal{Y}(b)$. На этом модуле действует только группа $\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$; чтобы действовала группа $\mathfrak{S}_{a+b}$, этот модуль надо расширить.

Этой формулой мы завели симметрическую моноидальную структуру на категории симметрических последовательностей (то есть, $\otimes$ — ассоциативный и коммутативный бифунктор).

Определение 2.20. *Скрученной коммутативной алгеброй* (TCA) называется коммутативный моноид в категории симметрических последовательностей.

Предложение 2.21. (1) *TCA — это то же самое, что (ассоциативная унитальная) градуированная алгебра $A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$ вместе с действием $\mathfrak{S}_k \curvearrowright A_k$ таким, что умножение $A_a \otimes A_b \to A_{a+b}$ $\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$-эквивариантно и блочно-коммутативно.*

(2) *Всякая симметрическая последовательность $\mathcal{X}$ порождает свободную TCA $\mathrm{Sym}(\mathcal{X})$,*

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{X})(k) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k} \Big(\bigotimes_i \mathcal{X}(\lambda_i)\Big).$$

То есть, для всякой TCA $\mathcal{A}$ верно $\mathrm{Hom}_{SymSeq}(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \cong \mathrm{Hom}_{TCA}(\mathrm{Sym}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Доказательство. Задача. □

Следствие 2.22. *Имеем изоморфизм скрученных коммутативных алгебр*

$$H^*(\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n)) \cong \mathrm{Sym}(L), \quad L(k) := \sigma^{k(n-1)} L_{(k)},$$

где $L_{(k)} \simeq \mathbf{k}^{\oplus(k-1)!}$ — $\mathfrak{S}_k$-модуль, аддитивно порождённый связными длинными графами на k-вершинах.

Доказательство. Аддитивно это следует из изоморфизма (2.2). Проверим, что умножение то же самое. Действительно, проекции $p : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Conf}_a(\mathbb{R}^n)$ на когомологиях соответствуют каноническим вложениям: $p^*(\alpha_{ij}) = \alpha_{ij}$. □

3. Нестабильные расщепления, π_* и H_* (23 февраля)

3.1. **Петли и гомотопические группы.** Известно, что пространства "разваливаются на части" после взятия надстройки или пространства петель: например,

$$\Sigma(A \times B) \simeq \Sigma A \vee \Sigma B \vee \Sigma A \wedge B, \quad \Omega(A \vee B) \simeq \Omega A \times \Omega B \times \Omega\Sigma(\Omega A \wedge \Omega B).$$

(Первое можно использовать, чтобы лучше понять (ко)гомологии, а второе — чтобы лучше понять гомотопические группы.) Начнём с пространств петель.

Лемма 3.1. *Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение, (E, m) — H-пространство, и p имеет гомотопическое сечение σ (т.е. $p \circ \sigma \simeq \mathrm{id}_B$). Тогда $E \simeq F \times B$.*

Доказательство. По аргументу Экманна–Хилтона, $m_* : \pi_*(E) \times \pi_*(E) \to \pi_*(E)$ совпадает с групповой операцией. Поэтому $F \times B \xrightarrow{i \times \sigma} E \times E \xrightarrow{m} E$ индуцирует изоморфизм на π_*. □

Следствие 3.2. *Если $F \to E \to B$ имеет гомотопическое сечение, то $\Omega E \simeq \Omega F \times \Omega B$.* □

Замечание 3.3. В условиях леммы, F и B являются ретрактами E, то есть тоже H-пространствами. Если нет кручения, то $H_*(E) \simeq H_*(F) \otimes H_*(B)$ как коалгебра, а вот умножение Понтрягина там другое; последовательность $H_*(F) \to H_*(E) \to H_*(B)$ будет "расширением алгебр Хопфа".

В условиях следствия получается "полупрямое произведение" H-пространств и алгебр Хопфа, "$\Omega E \simeq \Omega F \rtimes \Omega B$ и $H_*(\Omega E) \simeq H_*(\Omega F) \bigotimes H_*(\Omega B)$".

Следствие 3.4. *Пусть $M \cong N \setminus \mathrm{pt}$ — проколотое n-мерное многообразие, $n \geq 2$. Тогда имеем $\Omega\mathrm{Conf}_k(M) \simeq \prod_{r=0}^{k-1} \Omega(M \vee (S^{n-1})^{\vee r})$. В частности, $\Omega\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \simeq \prod_{r=1}^{k-1} \Omega((S^{n-1})^{\vee r})$.* □

Алгебры Понтрягина букетов сфер известны: $H_*(\Omega \bigvee_{\beta \in I} S^{n_\beta+1}) \simeq T(x_\beta : \beta \in I)$, $\deg x_\beta = n_\beta$. Опишем алгебру $H_*(\Omega\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$.

Классы $\alpha_{ij} \in H^{n-1}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$, которые соответствуют гауссовым отображениям $\gamma_{ij}(\vec{x}) = (x_j - x_i)/||x_j - x_i||$. К ним двойственны сферические классы $a_{ij} \in \pi_{n-1}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$, которые задаются любыми отображениями такого рода:

$$S^{n-1} \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n), \quad \xi \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1},\ y - \xi, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, y + \xi, x_{j+1}, \dots, x_k).$$

("все остальные точки неподвижны, а i-ая и j-тая ведут себя как двойная планета").

Замечание 3.5. Иногда удобнее рассмотреть отображение

$$a_{ij}(\xi) = (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, y + 2\xi, x_{j+1}, \dots, x_k)$$

("все остальные точки неподвижны, а j-ая вращается вокруг i-ой"). Они гомотопны: "замена системы отсчёта" (сдвиг на вектор $t\xi$, $t \in [0,1]$) заменяет отображение a_{ij} на гомотопное ему отображение $\xi \mapsto (x_1 + \xi, \dots, y, \dots, y + 2\xi, \dots)$, а дальше надо "успокоить" остальные точки. Если они достаточно далеко друг от друга, то при этих гомотопиях никакие две точки не столкнутся.

Напоминание: *скобка Уайтхеда* отображений $f : S^k \to X$, $g : S^\ell \to X$ — это

$$[f, g] : S^{k+\ell-1} \to S^k \vee S^\ell \xrightarrow{f \vee g} X,$$

где первая стрелка — приклеивающее отображение старшей клетки для $S^k \times S^\ell$. (В частности: если $f \vee g : S^k \vee S^\ell \to X$ продолжается до $S^k \times S^\ell \to X$, то $[f, g] = 0$.)

Лемма 3.6. *Классы $a_{ij} \in \pi_{n-1}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$ удовлетворяют тождествам:*
(1) *$a_{ij} = (-1)^n a_{ji}$;*
(2) *$[a_{ij}, a_{i'j'}] = 0$, если $\#\{i, j, i', j'\} = 4$;*
(3) *$[a_{ij}, a_{i\ell} + a_{j\ell}] = 0$, если $\#\{i, j, \ell\} = 3$.*

Доказательство. (1) — степень антиподального отображения. В остальных можно предъявить отображения $S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$, которые заклеивают эту скобку: (2) две двойные планеты; (3) планеты j и ℓ вращаются вокруг звезды i. □

Группы $\pi_{*+1}(X)$, $* \geq 1$, образуют квази-алгебру Ли[13] относительно скобки Уайтхеда. Под действием гомоморфизма Гуревича $\eta : \pi_k(X) \cong \pi_{k-1}(\Omega X) \to H_{k-1}(\Omega X)$ она переходит в коммутатор относительно умножения Понтрягина. Поэтому классы $B_{ij} := \eta(a_{ij}) \in H_{n-2}(\Omega\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$ удовлетворяют тем же соотношениям. Оказывается, это определяет всю алгебру Понтрягина.

Теорема 3.7 (Cohen–Gitler'02)**.** *Имеем изоморфизм алгебр Хопфа*

$$H_*(\Omega\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) \cong T(B_{ij} :\ 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j)/(\textit{соотношения (1)-(3)}), \quad \Delta B_{ij} = 1 \otimes B_{ij} + B_{ij} \otimes 1.$$

Эта алгебра — свободный $\mathbb{Z}$-модуль, $\sum_i \beta_i(\Omega\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) t^i = \prod_{r=1}^{k-1} (1 - rt^{n-2})^{-1}$, с базисом

$$\mathcal{B} = \{B_{i_1, j_1} \cdot \ldots \cdot B_{i_s, j_s} :\ s \geq 1, \quad j_1 < \dots < j_s, \quad i_1 < j_1, \dots, i_s < j_s\}.$$

Набросок доказательства (задача: восстановить детали). Вычисление аналогично вычислению кольца $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z})$: гомоморфизм справа налево определён (по лемме выше) и сюръективен (из расслоения, см. следствие 3.4). Аддитивную структуру алгебры слева мы знаем (тоже из расслоения), и видно, что $\mathcal{B}$ размером с её аддитивный базис. Осталось проверить, что $\mathcal{B}$ аддитивно порождает алгебру справа. □

[13] То есть, скобка Уайтхеда билинейна, градуированно-антикоммутативна и удовлетворяет аналогу тождества Якоби; но $[x, x]$ может быть нетривиальным элементом при $x \in \pi_{2*+1}(X)$.

Замечание 3.8. Эта алгебра известна как *алгебра Янга–Бакстера*; она связана с инвариантами конечного типа для крашеных кос.

Для тех, кто знает: она квадратично двойственна к $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$; более того, известно, что $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$ кошулева. Это объясняет связь между формулами для чисел Бетти.

По теореме Милнора–Мура получаем, что алгебра Ли $\pi_*(\Omega\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \otimes \mathbb{Q}$ задана теми же образующими и соотношениями.

3.2. **Надстройки и (ко)гомологии.** У леммы 3.1 и её следствия есть двойственное по Экманну–Хилтону утверждение (про гомотопическую ретракцию у корасслоения и букет). У нас возникнет не оно, а чуть более слабое утверждение.

Лемма 3.9. *Пусть $A \xrightarrow{\iota} B \to C$ — корасслоение, причём у ι есть гомотопическое <u>сечение</u> σ. Тогда $\Sigma A \simeq C \vee \Sigma B$.*

Доказательство. За счёт сечения, длинная точная последовательность гомологий превращается в расщепимые короткие точные последовательности $0 \to \widetilde{H}_{*+1}(C) \xrightarrow{\delta_*} \widetilde{H}_*(A) \to \widetilde{H}_*(B) \to 0$, где $\delta : C \to \Sigma A$ — граничное отображение. Поэтому $\delta \vee \Sigma\sigma : C \vee \Sigma B \to \Sigma A$ — гомотопическая эквивалентность по гомологической теореме Уайтхеда. (Задача: (a) разобраться, почему здесь не надо накладывать условия (одно)связности; (b) доказать без теоремы Уайтхеда.) □

Мы будем брать гомотопический кослой у вложений вида $\mathrm{Conf}_{a+b}(X) \to \mathrm{Conf}_a(X) \times \mathrm{Conf}_b(X)$. Если X — гладкое многообразие, оно описывается в терминах пространств Тома $\mathrm{Th}(\xi) := \mathbb{D}(\xi)/\mathbb{S}(\xi)$. Сегодня все многообразия гладкие. Вспомним, как это работает в общем случае.

Лемма 3.10. *Пусть $i : V \hookrightarrow W$ — замкнутое вложение подмногообразия. Тогда есть гомотопическое корасслоение*

$$W \setminus V \xrightarrow{j} W \xrightarrow{c} \mathrm{Th}(\nu),$$

где $\nu = \nu(i) := i^*(\tau_W)/\tau_V$ — нормальное расслоение.

Доказательство. Пусть $V \subset T \subset \overline{T} \subset W$ — трубчатая окрестность, $\overline{T} \cong \mathbb{D}(\nu)$. Тогда $W \setminus V \simeq W \setminus T$, и кослой замкнутого вложения $W \setminus T \hookrightarrow W$ гомеоморфен $\overline{T}/\partial T \cong \mathbb{D}(\nu)/\mathbb{S}(\nu) =: \mathrm{Th}(\nu)$. □

Замечание 3.11. Проекция c — это *отображение Понтрягина–Тома.* Если всё ориентируемо, то его композиция с изоморфизмом Тома

$$\widetilde{H}_*(W) \xrightarrow{c_*} \widetilde{H}_*(\mathrm{Th}(\nu)) \xleftarrow[\simeq]{\theta_\nu} H_{*-d}(V)$$

совпадает с обратным образом на гомологиях,

$$i^! : H_*(W) \xrightarrow{D_W^{-1}} H_c^{\dim W - *}(W) \xrightarrow{i^*} H_c^{\dim W - *}(V) \xrightarrow{D_V} H_{*-d}(V).$$

Здесь используется, что i — собственное отображение (прообраз компакта компактен!)

Вот лёгкое усиление этой леммы.

Лемма 3.12. *В условиях леммы 3.10, пусть ξ — любое векторное расслоение над W. Тогда имеем гомотопическое корасслоение $\mathrm{Th}(j^*\xi) \to \mathrm{Th}(\xi) \to \mathrm{Th}(\nu \oplus i^*\xi)$.*

Доказательство. Задача. □

Пусть теперь X — n-мерное гладкое многообразие. Применим лемму к диагональному вложению $\Delta_X : X \to X \times X$. Так как $\nu(\Delta_X) \cong \tau_X$, получаем корасслоение

$$\mathrm{Conf}_2(X) \xrightarrow{\iota_2} X \times X \to \mathrm{Th}(\tau_X)$$

и длинную точную последовательность

$$\cdots \to \widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_2(X)) \to \widetilde{H}_*(X \times X) \xrightarrow{c_*} \underbrace{\widetilde{H}_*(\mathrm{Th}(\tau_X))}_{\cong H_{*-n}(X;\widetilde{\mathbb{Z}})} \to \ldots,$$

где $\widetilde{\mathbb{Z}}$ — ориентирующий пучок. Отображение c_* можно вычислить, если структура $H^*(X)$ и $H_c^*(X)$ хорошо известна (в замкнутом случае см. [MiSt74, Theorem 11.11]).

Предложение 3.13. *Пусть* $X = M \times \mathbb{R}$, *где* M — d*-мерное многообразие. Тогда вложение* $\iota_2 : \mathrm{Conf}_2(X) \hookrightarrow X \times X$ *имеет гомотопическое сечение, и*

$$\Sigma\mathrm{Conf}_2(X) \simeq \mathrm{Th}(\tau_X) \vee \Sigma(X \times X) \simeq \Sigma\,\mathrm{Th}(\tau_M) \vee (\Sigma M)^{\vee 2} \vee \Sigma M^{\wedge 2},$$
$$\widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_2(M \times \mathbb{R})) \cong \widetilde{H}_*(M \times M) \oplus \underbrace{\widetilde{H}_*(\mathrm{Th}(\tau_M))}_{\cong H_{*-d}(M;\widetilde{\mathbb{Z}})}.$$

Доказательство. $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \cong (0,1) \sqcup (2,3) \hookrightarrow \mathbb{R}$ задаёт гомеоморфное вложение $e_1 \sqcup e_2 : X \sqcup X \to X$. Рассмотрим

$$\sigma : X \times X \to \mathrm{Conf}_2(X), \quad (x_1, x_2) \mapsto (e_1(x_1), e_2(x_2));$$

гомотопия $\iota_2 \circ \sigma \sim \mathrm{id}_{X\times X}$ — линейная по $\mathbb{R}$.

Дальше пользуемся леммой 3.9 и тем, что $\mathrm{Th}(\tau_X) = \mathrm{Th}(\tau_M \oplus \underline{\mathbb{R}}) \simeq \Sigma\,\mathrm{Th}(\tau_M)$. □

Обобщим. Для всех $1 \le i \le k$ пусть $pr_{k,i} : \mathrm{Conf}_k(X) \to X$ — проекция на i-ую координату, и $\nu_{k,i} := pr^*_{k,i}(\tau_X)$. Это изоморфные векторные расслоения ранга $n = \dim X$ над $\mathrm{Conf}_k(X)$.

Предложение 3.14. *Пусть* X — n*-мерное многообразие.*

(1) *Имеем гомотопическое расслоение* $\mathrm{Conf}_k(X) \xrightarrow{\iota_k} \mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X \to \bigvee_{i=1}^{k-1} \mathrm{Th}(\nu_{k-1,i})$. *В частности, имеем длинную точную последовательность*

$$\cdots \to \widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_k(X)) \xrightarrow{\iota_{k*}} \widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X) \to \bigoplus_{i=1}^{k-1} \underbrace{\widetilde{H}_*(\mathrm{Th}(\nu_{k-1,i}))}_{\cong H_{*-n}(\mathrm{Conf}_{k-1}(X);\dots)} \to \widetilde{H}_{*-1}(\mathrm{Conf}_k(X)) \to \dots$$

(2) *Если* $X \cong M \times \mathbb{R}$, *то* ι_k *имеет гомотопическое сечение, и*

$$\widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_k(X)) \cong \widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X) \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} \widetilde{H}_{*+1}(\mathrm{Th}(\nu_{k-1,i})),$$
$$\Sigma\mathrm{Conf}_k(X) \simeq \Sigma(\mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X) \vee \bigvee_{i=1}^{k-1} \mathrm{Th}(\nu_{k-1,i}).$$

Доказательство. (1) Мы применяем лемму 3.10 к замкнутому подмногообразию

$$W = \mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X, \quad V = W \setminus \mathrm{Conf}_k(X) = \bigsqcup_{i=1}^{k-1} \mathrm{Im}(\Delta_i), \quad \text{где}$$
$$\Delta_i = \mathrm{id} \times pr_{k-1,i} : \mathrm{Conf}_{k-1}(X) \to \mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X, \quad (x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, x_i)$$

— гомеоморфные вложения. Осталось заметить, что $\nu_{k-1,i} \cong \nu(\Delta_i)$ (это общий факт: нормальное расслоение к $\mathrm{id} \times f : M \to M \times N$ изоморфно $f^*(\tau_N)$).

(2) Как и в предыдущем предложении, сечение задаётся формулой

$$\sigma : \mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X \to \mathrm{Conf}_k(X), \quad (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \mapsto (e_1(x_1), \dots, e_1(x_{k-1}), e_2(x_k)).$$ □

Предложение 3.15. $\Sigma\mathrm{Conf}_k(M \times \mathbb{R})$ *гомотопически эквивалентно букету пространств вида*

$$\Sigma M^{\wedge N} \wedge \mathrm{Th}(\tau_M)^{\wedge a_1} \wedge \mathrm{Th}(\tau_M \oplus \tau_M)^{\wedge a_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{Th}(\tau_M^{\oplus k-1})^{\wedge a_{k-1}}$$

для некоторых $N, a_1, \dots, a_{k-1} \ge 0$. *В частности:*

- *Если* M — *параллелизуемое многообразие, то* $\Sigma\mathrm{Conf}_k(M \times \mathbb{R})$ *гомотопически эквивалентно букету сфер и пространств вида* $\Sigma^i M^{\wedge N}$;
- $\Sigma\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \simeq \bigvee_{r=1}^{k-1} (S^{(n-1)r})^{\vee \left[{k-1 \atop k-r}\right]}$ — *букет сфер.*

Задача: восстановить детали доказательства. Пара свойств, которые там используются:

- Если η — векторное расслоение над Z и $\pi : Y \times Z \to Z$ — стандартная проекция, то $\mathrm{Th}(\pi^*\eta) \simeq Y_+ \wedge \mathrm{Th}(\eta)$;
- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}^{\oplus k}) \simeq \Sigma^k(X_+) \simeq S^k \vee \Sigma^k X$.

Доказательство. Введём расслоения $\tau_{k,i} := pr^*_{k,i}(\tau_M)$ над $\mathrm{Conf}_k(X)$. Утверждение получается по индукции из следующих гомотопических эквивалентностей:

(1) $\Sigma\mathrm{Conf}_k(X) \simeq \Sigma(\mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X) \vee (\Sigma\,\mathrm{Th}(\tau_{k-1,k-1}))^{\vee k-1}$;
(2) $\Sigma\,\mathrm{Th}(\tau_{k,k}^{\oplus N}) \simeq \Sigma(\mathrm{Conf}_{k-1}(X))_+ \wedge \mathrm{Th}(\tau_M^{\oplus N}) \vee \Sigma\,\mathrm{Th}(\tau_{k-1,k-1}^{\oplus N+1})^{\vee k-1}$ для всех $N \ge 1$.

(1) доказывается так: $\nu_{k,i} \simeq \tau_{k,i} \oplus \underline{\mathbb{R}} \simeq \tau_{k,k} \oplus \underline{\mathbb{R}}$ и поэтому $\mathrm{Th}(\nu_{k,i}) \simeq \Sigma\,\mathrm{Th}(\tau_{k,k})$. Теперь всё следует из предыдущего предложения.
(2) доказывается так. Пусть $\pi : \mathrm{Conf}_{k-1}(X) \times X \to X$ — проекция на вторую координату; тогда $\tau_{k,k} = \iota_k^*(\pi^*(\tau_M))$ и $\Delta_i^*(\tau_{k,k}) = \tau_{k-1,i} \simeq \tau_{k-1,k-1}$. Значит, если применить лемму 3.12 к $j = \iota_k$, $\xi := \pi^*(\tau_M)^{\oplus N}$, то получится корасслоение

$$\mathrm{Th}(\tau_{k,k}^{\oplus N}) \to \mathrm{Th}(\pi^*(\tau_M)^{\oplus N}) \to \mathrm{Th}(\nu_{k-1,k-1} \oplus \tau_{k-1,k-1}^{\oplus N})^{\vee k-1},$$

то есть

$$\mathrm{Th}(\tau_{k,k}^{\oplus N}) \to (\mathrm{Conf}_{k-1}(X))_+ \wedge \mathrm{Th}(\tau_M^{\oplus N}) \to \Sigma\,\mathrm{Th}(\tau_{k-1,k-1}^{\oplus N+1})^{\vee k-1}.$$

Осталось заметить, что левая стрелка имеет сечение (индуцированное сечением для ι_k). $\square$

Вспомним, что мы получили расщепимые точные последовательности

$$0 \to \widetilde{H}^*(M \times M) \to \widetilde{H}^*(\mathrm{Conf}_2(M \times \mathbb{R})) \to \widetilde{H}^*(\mathrm{Th}(\tau_M)) \to 0.$$

За счёт расщепления, класс Тома $\theta_M \in \widetilde{H}^{n-1}(\mathrm{Th}(\tau_M))$ поднимается до некоторого класса $\alpha_{12} \in H^{n-1}(\mathrm{Conf}_2(M \times \mathbb{R}))$. С помощью "гауссовых отображений" $\gamma_{ij} : \mathrm{Conf}_k(M \times \mathbb{R}) \to \mathrm{Conf}_2(M \times \mathbb{R})$ теперь можно определить классы $\alpha_{ij} \in H^{n-1}(\mathrm{Conf}_k(M \times \mathbb{R}))$. Дальше проверяется, что к расслоению Фаделла–Нойвирта применима теорема Лере–Хирша. Это позволяет доказать следующий результат. Для градуированной $\mathbf{k}$-алгебры A рассмотрим алгебру

$$B(n,k,A) := (H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbf{k}) \otimes A^{\otimes k})/(\alpha_{ij} \otimes 1^{\otimes i-1} \otimes a \otimes 1^{k-i-1} = \alpha_{ij} \otimes 1^{j-1} \otimes a \otimes 1^{k-j-1}, \quad \forall a \in A).$$

На ней есть возрастающая фильтрация по степеням первого тензорного множителя.

Предложение 3.16 ([CT78])**.** *Пусть M — $(n-1)$-мерное гладкое многообразие, $n \geq 3$, и $H_*(M;\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Тогда алгебра $H^*(\mathrm{Conf}_k(M \times \mathbb{R});\mathbf{k})$ допускает фильтрацию такую, что $\mathrm{gr}\, H^*(\mathrm{Conf}_k(M \times \mathbb{R});\mathbf{k}) \cong \mathrm{gr}\, B(n,k,H^*(M;\mathbf{k}))$ как алгебры.* $\square$

Замечание 3.17. На самом деле, для ориентированного n-мерного многообразия Коэн и Тейлор построили спектральную последовательность $E_1^{p,q} = \mathrm{gr}_q\, B(n,k,H^*(X;\mathbf{k}))^{p+q} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Conf}_k(X);\mathbf{k})$. Она вырождается при $X = M \times \mathbb{R}$, так как это пространство *i-ациклично*: естественный гомоморфизм $H_c^*(M \times \mathbb{R}) \to H^*(M \times \mathbb{R})$ нулевой. ("i" — не численный параметр, а первая буква слова interior).

3.3. **Гомологии** $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$**.** У $H_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z})$ есть удобный базис из классов, которые соответствуют упорядоченным лесам из бинарных деревьев таким, что листья — это в точности $\{1,\dots,k\}$. Альтернативно, они соответствуют "произведениям скобочных последовательностей". Например, $x_6 \cdot [[x_2,x_5],[x_4,x_8]] \cdot [[x_1,x_7],x_3]$ — это лес на $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $[[x_1,x_7],x_3]$ — это дерево с листьями $\{1,3,7\}$. (Возможно, здесь появится картинка.)

Замечание 3.18. Деревья с множеством листьев $S \subset \{1,\dots,k\}$ биективно соответствуют k-арным операциям в магме $(M,[-,-])$ таким, что только $|S|$ переменных существенны: например, дерево $[[x_1,x_7],x_3]$ — это операция $M^{\times k} \to M$, которая зависит только от x_1,x_3,x_7. Композиция операций соответствует подстановке деревьев (tree grafting, буквально "прививке") друг в друга.

Листья деревьев будем рисовать как цифры в кружочках, а внутренние вершины — чёрным кружочком. Пусть $V(F)$ — число внутренних вершин в лесу F (то есть, число запятых в произведении скобочных последовательностей).

Определение 3.19. Дереву T на множестве вершин $S \subset \{1,\dots,k\}$ сопоставляется *планетная система* $P_T : (S^{n-1})^{\times V(T)} \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ по следующему правилу: точке $u = (u_v)_{v \in V(T)} \in \prod_{v \in V(T)} S^{n-1}$ сответствует конфигурация

$$P_T(u) = (x_1,\dots,x_k) \in \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n), \quad x_i := \begin{cases} \sum_{v<i} \pm\varepsilon^{h(v)} \cdot u_v, & i \in S; \\ x_i^0, & i \notin S. \end{cases}$$

Здесь сумма берётся по пути от корня до вершины, знак зависит от того, в какую сторону мы поворачиваем, а $\varepsilon > 0$ — маленькое число.

То есть, определение рекурсивное: если $T = [T_1,T_2]$, то $P_{[T_1,T_2]}$ — это две маленькие планетные системы P_{T_1} и P_{T_2}, которые вращаются вокруг общего центра масс; дереву без внутренних вершин сопоставляется неподвижная планета.

Если $F = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_s$ — лес, то ему сопоставляется планетная система $P_F := \prod_i P_{T_i} : (S^{n-1})^{\times V(F)} \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ (“независимые планетные системы, соответствующие деревьям”).

Класс планетной системы будем обозначать так же, $P_F \in H_{(n-1)V(F)}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z})$.

Пример: $[x_i, x_j]$ — дерево с одной чёрной вершиной; $P_{[x_i,x_j]} = a_{ij} : S^{n-1} \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 3.20. Множители в произведении сфер соответствуют внутренним вершинам, то есть запятым в скобочной последовательности. Именно так мы их и упорядочиваем.

В семье всё должно быть поровну: она любит длинные прогулки, он любит высокие деревья.

Определение 3.21. Дерево T *высокое*, если оно соответствует скобочной последовательности вида $[\dots[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}]\dots, x_{i_m}]$, где $i_1 = \min\{i_1,\dots,i_m\}$.

Лес $F = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_s$ *высокий*, если все деревья высокие, и вдобавок наименьшие вершины упорядочены по возрастанию ($i_1^{(1)} < \dots < i_1^{(s)}$.)

Предложение 3.22. *$\{P_T : T$ — высокое дерево на $\{1,\dots,k\}\}$ — базис модуля $H_{(n-1)(k-1)}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Обозначим $S = \{\sigma \in \mathfrak{S}_k : \ \sigma(1) = 1\}$. Мы знаем, что классы связных длинных графов $\{\alpha_\sigma := \alpha_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{\sigma(k-1),\sigma(k)} : \ \sigma \in S\}$ — базис модуля $H^{(n-1)(k-1)}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$. Мы докажем, что он дуален к нашему набору

$$\{P_{T_\sigma} : \sigma \in S\}, \quad T_\sigma = [[\dots[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}],\dots], x_{\sigma(k)}].$$

Для этого введём отображения

$$\gamma_\sigma := \gamma_{\sigma(1),\sigma(2)} \times \dots \times \gamma_{\sigma(k-1),\sigma(k)} : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to (S^{n-1})^{\times(k-1)}.$$

По построению, $\langle \alpha_\sigma, P_{T_\tau}\rangle$ — это степень композиции $f_{\tau,\sigma} := P_{T_\tau} \circ \gamma_\sigma : (S^{n-1})^{\times k-1} \to (S^{n-1})^{\times k-1}$. Эта композиция устроена так: в каждый момент времени надо посмотреть на нормированные векторы “из одной планеты в другую”. Так как радиусы орбит маленькие, вместо этого можно смотреть на нормированные векторы между соответствующими центрами масс, поэтому $f_{\tau,\sigma}$ гомотопно несложно устроенному отображению (задача: разобраться, какому). Чуть конкретнее:

- $f_{\sigma,\sigma}$ гомотопно тождественному (задача) и поэтому его степень равна единице;
- Если $\sigma \neq \tau$, то найдётся индекс $1 < i < k$ такой, что $\sigma^{-1}(\tau(i-1)) < \sigma^{-1}(\tau(i)) > \sigma^{-1}(\tau(i+1))$. Тогда $f_{\sigma,\tau}$ гомотопно отображению, образ которого содержится в подмножестве $\{(u_1,\dots,u_{k-1}) : \ u_i = -u_{i+1}\} \subset (S^{n-1})^{\times k-1}$ (задача), и степень равна нулю. □

Следствие 3.23. *$\{P_F : F$ — высокий лес на $\{1,\dots,k\}\}$ — базис в $H_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z})$, дуальный к базису длинных графов в $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Это сводится к предыдущему предложению: планетные системы (соотв., гауссовы отображения для длинных графов) получаются перемножением из случая деревьев (соотв., связных длинных графов). □

Следствие 3.24. $\Sigma\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \simeq \bigvee_{r=1}^{k-1}(S^{(n-1)r})^{\vee\left[{k \atop k-j}\right]}$.

Доказательство. $\Sigma(S^{n-1})^{\times r} \simeq \Sigma S^{(n-1)r} \vee \dots$, поэтому в гомологиях $\Sigma\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ есть базис из сферических классов. Отображение из букета этих сфер — ГЭ по гомологической теореме Уайтхеда. □

Возникает естественный вопрос: как посчитать класс P_F, если лес F не высокий?

Предложение 3.25. *Для классов в $H_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$, которые соответствуют произведениям скобочных последовательностей, есть коммутативность, тождество Якоби и правило Лейбница:*

$$[P_{F_1}, P_{F_2}] + (-1)^{|F_1|\cdot|F_2|}[P_{F_2}, P_{F_1}] = 0, \quad \pm[P_{F_1},[P_{F_2},P_{F_3}]] \pm [P_{F_2},[P_{F_3},P_{F_1}]] \pm [P_{F_3},[P_{F_1},P_{F_2}]] = 0,$$
$$P_{F_1}\cdot P_{F_2} = (-1)^{|F_1|\cdot|F_2|}P_{F_2}\cdot P_{F_1}, \quad [P_{F_1}, P_{F_2}\cdot P_{F_3}] = [P_{F_1},P_{F_2}]\cdot P_{F_3} + (-1)^{|P_{F_1}|\cdot|F_2|}P_{F_1}\cdot[P_{F_2},P_{F_3}].$$

Доказательство. Мы позже обсудим, как свести общий случай к случаю $F_i = x_i$ с помощью *подстановок.* Теперь надо доказать тождества

$$[x_i,x_j] + (-1)^{(n-1)^2}[x_j,x_i] = 0, \ \ [x_i,[x_j,x_k]] + [x_j,[x_k,x_i]] + [x_k,[x_i,x_j]] = 0,$$
$$x_i\cdot x_j = x_j\cdot x_i, \quad [x_i, x_j\cdot x_k] = [x_i,x_j]\cdot x_k + x_j\cdot[x_i,x_k]$$

Соотношения коммутативности — это $P_{[x_i,x_j]} + (-1)^{n-1} P_{[x_j,x_i]} = 0$, то есть $a_{ij} = (-1)^n a_{ji}$ (мы его уже доказали) и тавтология $P_{x_i \cdot x_j} = P_{x_j \cdot x_i} : (S^{n-1})^{\times 0} \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$.

Тождество Якоби можно доказать тремя способами:

- геометрически (явно заклеить сумму трёх планетных систем);
- алгебраически (между классами планетных систем $P_{[x_i,[x_j,x_k]]}, P_{[x_j,[x_k,x_i]]}, P_{[x_k,[x_i,x_j]]}$ есть ровно одно линейное соотношение, причём оно $\mathfrak{S}_3$-полуинвариантно);
- свести к уже известному (достаточно доказать, что оно тривиально спаривается с длинными графами $\alpha_{12}\alpha_{23}$ и $\alpha_{13}\alpha_{32}$; а это следует из соотношений Арнольда (задача)).

Правило Лейбница: пусть планета i вращается вокруг неподвижных звёзд j и k; это класс $P_{[x_i,x_j \cdot x_k]}$. Разделив орбиту на две части, получим как раз $P_{[x_i,x_j] \cdot x_k}$ и $P_{x_j \cdot [x_i,x_k]}$. $\square$

3.4. **Маленькие диски и их композиции.** Конфигурации точек нельзя подставлять друг в друга; но можно точки утолстить, тогда будет можно. Пусть $n, k \geq 0$.

Определение 3.26 (Вариант I)**.** *Маленьким n-диском* называется сохраняющее ориентацию прямоугольное вложение открытого единичного куба в себя, то есть всякое вложение вида

$$(0,1)^n \hookrightarrow (0,1)^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_1 x_1 + b_1, \dots, a_n x_n + b_n), \quad a_i > 0.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_n(k)$ пространство всех наборов из k непересекающихся маленьких n-дисков,

$$\mathcal{E}_n(k) = \{f = \sqcup_i f_i : ((0,1)^n)^{\sqcup k} \to (0,1)^n \mid f \text{ инъективно, и все } f_i \text{ — маленькие диски}\}.$$

Определение 3.27 (Вариант II)**.** *Маленьким n-диском* называется вложение открытого единичного диска $\mathring{D}^n$ в себя, вида $x \mapsto \lambda x + y$, $\lambda > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Пространство $\mathcal{E}_n(k)$ определяется аналогично.

Эти конструкции гомотопически эквивалентны; мы не будем это проверять.

Предложение 3.28. $\mathcal{E}_n(k) \simeq \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ *— эквивариантная ГЭ.*

Доказательство. Задача. ($\mathcal{E}_n(k) \to \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ — это взятие центра масс.) $\square$

Пространства $\mathcal{E}_n(k)$ уже можно подставлять друг в друга. Во-первых, можно подставить (скажем, на j-ую позицию) не маленький диск, а ℓ маленьких дисков в нём:

$$\mathcal{E}_n(k) \times \mathcal{E}_n(\ell) \xrightarrow{\circ_{k,j}} \mathcal{E}_n(k+\ell-1), \quad (f_1, \dots, f_j, \dots, f_k) \circ_j (g_1, \dots, g_\ell) := (f_1, \dots, f_j \circ g_1, \dots, f_j \circ g_\ell, \dots, f_k).$$

А можно одновременно подставлять на каждую из позиций: получатся отображения

$$\circ_k^{\ell_1, \dots, \ell_k} : \mathcal{E}_n(k) \times \mathcal{E}_n(\ell_1) \times \dots \times \mathcal{E}_n(\ell_k) \to \mathcal{E}_n(\ell_1 + \dots + \ell_k).$$

Видно, что эти операции согласованы с подстановкой деревьев: планетные системы именно так и определялись. Подробнее: если $T(T_1, \dots, T_k)$ — дерево, полученное подстановкой деревьев T_i вместо всех листьев дерева T, то имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(S^{n-1})^k \times (S^{n-1})^{\times V(T_1)} \times \dots \times (S^{n-1})^{\times V(T_k)} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "P_T \times P_{T_1} \times \dots \times P_{T_k}"] & (S^{n-1})^{\times V(T(T_1,\dots,T_k))} \arrow[d, "P_{T(T_1,\dots,T_k)}"'] \\
\mathcal{E}_n(k) \times \mathcal{E}_n(\ell_1) \times \dots \times \mathcal{E}_n(\ell_k) \arrow[r, "\circ"] & \mathcal{E}_n(\ell_1 + \dots + \ell_k),
\end{tikzcd}$$

где отображение сверху — перестановка множителей (соответствует тому, как упорядочены внутренние вершины дерева $T(T_1, \dots, T_k)$). То же верно для лесов (если правильно понимать, что такое “подстановка леса в дерево”; это чуть понятнее на языке произведений и скобок). Именно из этой коммутативной диаграммы следует, что свойства типа тождества Якоби достаточно проверять на образующих.

например, получаем, коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(S^{n-1})^3 \times (S^{n-1})^{\times V(T_1)} \times (S^{n-1})^{\times V(T_2)} \times (S^{n-1})^{\times V(T_3)} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "P_{[x_1,[x_2,x_3]]} \times P_{T_1} \times P_{T_2} \times P_{T_3}"] & (S^{n-1})^{\times (V(T_1)+V(T_2)+V(T_3))} \arrow[d, "P_{[T_1,[T_2,T_3]]}"'] \\
\mathcal{E}_n(3) \times \mathcal{E}_n(\ell_1) \times \mathcal{E}_n(\ell_2) \times \mathcal{E}_n(\ell_3) \arrow[r, "\circ_3^{\ell_1,\ell_2,\ell_3}"] & \mathcal{E}_n(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3),
\end{tikzcd}$$

откуда $P_{[T_1,[T_2,T_3]]} = \circ_*(P_{[x_1,[x_2,x_3]]} \times P_{T_1} \times P_{T_2} \times P_{T_3})$, и дальше пользуемся билинейностью.

Итак, для классов $P_F \in H_{|F|}(\mathcal{E}_n(k))$ имеем

$$[P_{F_1}, P_{F_2}] + (-1)^{|F_1|\cdot|F_2|}[P_{F_2}, P_{F_1}] = 0, \quad \pm[P_{F_1}, [P_{F_2}, P_{F_3}]] \pm [P_{F_2}, [P_{F_3}, P_{F_1}]] \pm [P_{F_3}, [P_{F_1}, P_{F_2}]] = 0,$$
$$P_{F_1} \cdot P_{F_2} = (-1)^{|F_1|\cdot|F_2|} P_{F_2} \cdot P_{F_1}, \quad [P_{F_1}, P_{F_2} \cdot P_{F_3}] = [P_{F_1}, P_{F_2}] \cdot P_{F_3} + (-1)^{|P_{F_1}|\cdot|F_2|} P_{F_1} \cdot [P_{F_2}, P_{F_3}].$$

Теперь мы можем доказать обещанный результат про инварианты действия на старших когомологиях.

Следствие 3.29. (1) *Пусть* $2 \in \mathbf{k}^\times$ *и* n *нечётно. Тогда* $(L_{(k)} \otimes \mathbf{k})^{\mathfrak{S}_k} = 0$ *при* $k \geq 2$.

(2) *Пусть* $3 \in \mathbf{k}^\times$ *и* n *чётно. Тогда* $(L_{(k)} \otimes \mathbf{k})^{\mathfrak{S}_k} = 0$ *при* $k \geq 3$.

Доказательство. $L_{(k)} \otimes \mathbf{k}$ — двойственный к свободному $\mathbf{k}$-модулю $H_{(n-1)(k-1)}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k})$. При двойственности инварианты переходят в коинварианты, поэтому достаточно доказать, что $M = H_{(n-1)(k-1)}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k})_{\mathfrak{S}_k}$ тривиален. Этот модуль порождён высоким деревом $T = [[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots], x_k]$, т.к. все остальные высокие деревья получаются из него действием $\mathfrak{S}_k$ (с точностью до знака). Перестановка $1 \leftrightarrow 2$ переводит T в $(-1)^n T$, поэтому при нечётном n получаем $2T = 0$. При чётном n этот фокус не работает, зато из тождества Якоби получаем $3T = 0$. □

Замечание 3.30. Вообще, при $6 \in \mathbf{k}^\times$ имеем изоморфизм $\mathfrak{S}_k$-модулей

$$H_{(n-1)(k-1)}(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathtt{Lie}(k) \otimes \mathbb{Z}(n-1),$$

где $\mathbb{Z}(2i)$ — тривиальное представление, $\mathbb{Z}(2i+1)$ — знаковое, а $\mathtt{Lie}(k) \subset FL(x_1, \ldots, x_k)$ — подмодуль свободной алгебры Ли, порождённый итерированными коммутаторами длины k с неповторяющимися индексами. Мы это не будем доказывать, но это просто: достаточно понять, что $\mathtt{Lie}(k)$ имеет нужную размерность (это упражнение).

4. Операды и монады I (2 марта)

4.1. **Мотивация.** Маленькие диски можно подставлять друг в друга: обозначим

$$\mathcal{E}_n(k) \times \mathcal{E}_n(\ell_1) \times \cdots \times \mathcal{E}_n(\ell_k) \xrightarrow{\gamma_k^{\ell_1,\ldots,\ell_k}} \mathcal{E}_n(\ell_1 + \cdots + \ell_k),$$
$$((f_1, \ldots, f_k), (g_{1,1}, \ldots, g_{1,\ell_1}), \ldots, (g_{k,1}, \ldots, g_{k,\ell_k})) \mapsto (f_1 \circ g_{1,1}, \ldots, f_1 \circ g_{1,\ell_1}, f_2 \circ g_{2,1}, \ldots, f_k \circ g_{k,\ell_k}).$$

Сегодня мы поймём, что эти отображения задают на $\{\mathcal{E}_n(k) : k \geq 0\}$ структуру *симметрической операды* в симметрической моноидальной категории $(\mathcal{T}op_*, \times, *)$. То есть, $\mathcal{E}_n(k)$ — это “пространство k-арных операций”, а морфизмы $\gamma_k^{\ell_1,\ldots,\ell_k}$ соответствуют подстановке операций друг в друга.

Где действуют эти операции? Главный пример: на n-кратных пространствах петель. А именно, вспомним, что

$$\mathcal{E}_n(k) = \{f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_k : (0,1)^n \sqcup \cdots \sqcup (0,1)^n \hookrightarrow (0,1)^n\}, \quad \Omega^n X = \{g : [0,1]^n \to X \mid g(\partial[0,1]^n) = *\}.$$

Тогда из набора сфероидов $g_1, \ldots, g_k \in \Omega^n X$ и точки $f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_k \in \mathcal{E}_n(k)$ можно изготовить один сфероид

$$\theta_k(f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_k; g_1, \ldots, g_k) : [0,1]^n \to X, \quad x \mapsto \begin{cases} g_i(y), & x = f_i(y); \\ * & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта формула задаёт непрерывное отображение

$$\theta_k : \mathcal{E}_n(k) \times (\Omega^n X)^{\times k} \to \Omega^n X. \tag{4.1}$$

Вот ещё несколько объектов, которые на самом деле кодируют k-арные операции.

В категории множеств:

- В ассоциативном моноиде ровно $k!$ способов что-то сделать с k элементами: $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_{\sigma(1)} \cdot x_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}$. То есть, множество k-арных операций — это $\mathtt{Mon}(k) = \mathfrak{S}_k \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$.
- В коммутативном ассоциативном моноиде ровно один способ это сделать: $\mathtt{CommMon}(k) = \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_k\} = * \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$.
- В унитальной магме (т.е. множестве с бинарной операцией, у которой есть двусторонняя единица) множество k-арных операций $\mathtt{Mag}(k)$ — это множество плоских бинарных деревьев с k листьями, на которых расставлены числа от 1 до k. Это $C_k \cdot k!$-элементное множество со свободным действием $\mathfrak{S}_k$. Композиция операций — это подстановка деревьев друг в друга. (Определено единственное дерево без листьев: его подстановка вместо

листа соответствует нейтральному элементу как 0-арной операции. Если магма не унитальная — такой операции нет, и дерево без листьев запрещено.)

В категории **k**-модулей: мы уже следим за k-арными полилинейными операциями. Например,

- В ассоциативной алгебре с единицей они образуют тавтологическое представление симметрической группы: можно брать линейные комбинации всевозможных $x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}$. Получаем модули $\mathtt{Ass}(k) = \mathbf{k}[\mathfrak{S}_k] \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$.
- В коммутативной ассоциативной алгебре, по сути, ровно один способ перемножить k элементов, поэтому $\mathtt{Com}(k) = \mathbf{k} \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$.
- В алгебре Ли множество k-арных операций — это $\mathbf{k}[\mathfrak{S}_k]$-модуль $\mathtt{Lie}(k)$ (см. выше).

4.2. **Формальное определение.** Напомним, что в (симметрической) моноидальной категории $\mathcal{C}$, помимо (коммутативного) ассоциативного умножения $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, есть *моноидальная единица* — выделенный объект $I \in \mathcal{C}$ и изоморфизмы $I \otimes X \xrightarrow{\simeq} X$, $X \otimes I \xrightarrow{\simeq} X$.

Определение 4.1. Пусть $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ — симметрическая моноидальная категория. *Несимметрическая операда*, или *ns-операда* в $\mathcal{C}$ — это набор объектов $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(k)\}_{k \geq 0}$ вместе с выбором морфизма *единицы*[14] $1 : I \to \mathcal{O}(1)$ и морфизмов композиции

$$\gamma_k^{\ell_1, \ldots, \ell_k} : \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(\ell_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(\ell_k) \to \mathcal{O}(\ell_1 + \cdots + \ell_k), \quad \text{“}c \otimes d_1 \otimes \cdots \otimes d_k \mapsto \gamma_k(c; d_1, \ldots, d_k)\text{”}$$

для всех $k \geq 0$, $\ell_1, \ldots, \ell_k \geq 0$, таких что

(1) Композиция ассоциативна: грубо говоря,

$$\text{“}\gamma_k(c; \gamma_{\ell_1}(d_1; f_{1,1}, \ldots, f_{1,\ell_1}), \ldots, \gamma_{\ell_k}(d_k; f_{k,1}, \ldots, f_{k,\ell_k})) = \gamma_{\ell_1 + \cdots + \ell_k}(\gamma_k(c; d_1, \ldots, d_k); f_{1,1}, \ldots, f_{k,\ell_k})\text{”}$$

для произвольных $c \in \mathcal{O}(k)$, $d_i \in \mathcal{O}(\ell_i)$, $f_{i,j} \in \mathcal{O}(r_{ij})$. Строгое определение: диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(k) \otimes \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{O}(\ell_i) \otimes \bigotimes_{i=1}^k \bigotimes_{j=1}^{\ell_i} \mathcal{O}(r_{ij}) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \gamma_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{\ell_k}"] \arrow[d, "\gamma_k \otimes \mathrm{id}"] & \mathcal{O}(k) \otimes \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{O}(\sum_{j=1}^{\ell_i} r_{ij}) \arrow[d, "\gamma_k"] \\
\mathcal{O}(\sum_{i=1}^k \ell_i) \otimes \bigotimes_{i,j} \mathcal{O}(r_{ij}) \arrow[r, "\gamma_{\ell_1 + \cdots + \ell_k}"] & \mathcal{O}(\sum_{i,j} r_{ij})
\end{tikzcd}$$

коммутативна[15].

(2) “Единица — это тождественная операция”: $\gamma_1(1; d) = d$, $\gamma_k(c; 1, \ldots, 1) = c$ для $d \in \mathcal{O}(\ell)$, $c \in \mathcal{O}(k)$. Строгое определение: композиции

$$\mathcal{O}(\ell) \cong I \otimes \mathcal{O}(\ell) \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(\ell) \xrightarrow{\gamma_1^\ell} \mathcal{O}(\ell),$$
$$\mathcal{O}(k) \cong \mathcal{O}(k) \otimes I^{\otimes k} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes 1^{\otimes k}} \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes k} \xrightarrow{\gamma_k^{1, \ldots, 1}} \mathcal{O}(k)$$

— это тождественные морфизмы.

У примеров, которые мы рассматриваем, есть следующие особенности:

- “Аргументы операций равноправны”: на множестве k-арных операций $\mathcal{O}(k)$ действует справа симметрическая группа $\mathfrak{S}_k$;
- Всегда есть выделенная 0-арная операция $* \in \mathcal{O}(0)$ “взять нейтральный элемент”.

Определение 4.2. *Операда*, или *симметрическая операда* — это ns-операда, на объектах которой заданы действия $\mathcal{O}(k) \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$ такие, что

(3) композиции $\mathfrak{S}_k$-эквивариантны слева и $\mathfrak{S}_{\ell_i}$-эквивариантны:

$$\gamma_k(c.\sigma; d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(k)}) = \gamma_k(c; d_1, \ldots, d_k), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_k;$$

$$\gamma_k(c; d_1.\tau_1, \ldots, d_k.\tau_k) = \gamma_k(c; d_1, \ldots, d_k).(\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_k), \quad \tau_i \in \mathfrak{S}_{\ell_i}.$$

---

[14] Про неё нужно думать как про 1-арную операцию “$x \mapsto x$”

[15] Мы неявно берём композиции с естественными изоморфизмами $(A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\simeq} A \otimes (B \otimes C)$.

Определение 4.3. $\mathcal{O}$ — операда *с отмеченной точкой*[16], если выбран морфизм $\eta : I \to \mathcal{O}(0)$.

Топологическая операда — это операда в $(\mathcal{T}op, \times, *)$.
Линейная операда — это операда в $(\mathbf{k}\mathcal{M}od, \otimes_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$.
DG-операда — это операда в $(\mathcal{C}h(\mathbf{k}), \otimes_{\mathbf{k}}, (\mathbf{k}, 0))$.

Вот несколько примеров операд с отмеченной точкой.

(1) Мы уже обсуждали операды с отмеченной точкой $\mathtt{Mag}, \mathtt{Mon}, \mathtt{CommMon}$ в множествах.
(2) Линейные операды:
  (a) Ассоциативные алгебры соответствуют операде $\mathtt{Ass}$, $\mathtt{Ass}(k) = \mathbf{k}[\mathfrak{S}_k] \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$. Эквивалентно, можно рассматривать ns-операду $\mathtt{As}$, $\mathtt{As}(k) = \mathbf{k}$, в которой все композиции — тождественные отображения. (Вообще, всякой ns-операде $\mathcal{N}$ можно сопоставить операду с $\mathcal{O}(k) = \mathcal{N}(k) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathfrak{S}_k]$; здесь это и произошло.)
  (b) Коммутативные ассоциативные алгебры соответствуют операде $\mathtt{Com}$, $\mathtt{Com}(k) = \mathbf{k}$ с тривиальным действием. Композиции — тождественные отображения. Заметим, что она не приходит из ns-операды. (Градуированно-коммутативные соответствуют *той же* операде в категории градуированных модулей).
  (c) Алгебры Ли соответствуют операде $\mathtt{Lie}$, где $\mathbf{k}$-модуль $\mathtt{Lie}(k)$ мы уже обсуждали выше. У этой операды нет отмеченной точки, т.к. в алгебрах Ли нет 0-арных операций!
(3) *Операда маленьких дисков* $\mathcal{E}_n$ — наш основной пример топологической операды (но, конечно, любая операда в $\mathcal{S}et$ будет “дискретной” операдой в $\mathcal{T}op$: например, $\mathtt{Mon}$ и $\mathtt{CommMon}$).

Определение 4.4. Пусть $\mathcal{O}$ — операда в $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. *Алгебра* над $\mathcal{O}$, или $\mathcal{O}$-алгебра, — это объект $A \in \mathcal{C}$ вместе с отображениями “действия”

$$\theta_k : \mathcal{O}(k) \otimes A^{\otimes k} \to A, \quad k \geq 0,$$

такими, что

(1) действие согласовано с композицией: если $\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_k$, то

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(\ell_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(\ell_k) \otimes A^{\otimes \ell} \arrow[r, "\gamma_k \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{O}(\ell) \otimes A^{\otimes \ell} \arrow[dr, bend left, "\theta_\ell"] & \\
\mathcal{O}(k) \otimes (\mathcal{O}(\ell_1) \otimes A^{\otimes \ell_1}) \otimes \cdots \otimes (\mathcal{O}(\ell_k) \otimes A^{\otimes \ell_k}) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \theta_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{\ell_k}"] & \mathcal{O}(k) \otimes A^{\otimes k} \arrow[r, "\theta_k"] & A;
\end{tikzcd}$$

(2) единица действует тривиально: “$\theta_1(1; a) = a$”, то есть композиция

$$A \cong I \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}(1) \otimes A \xrightarrow{\theta_1} A$$

— тождественное отображение;
(3) θ_k — $\mathfrak{S}_k$-инвариантные отображения, то есть

$$\theta_k(c \cdot \sigma; a_1, \ldots, a_k) = \theta_k(c; a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)}), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_k.$$

(Для ns-операд последнее условие убирается.) Обозначение: $\mathcal{O} \curvearrowright_\theta A$.

Операды придумал Питер Мэй, чтобы сформулировать следующее предложение.

Предложение 4.5. *Отображения* (4.1) *задают на* $\Omega^n X$ *структуру* $\mathcal{E}_n$*-алгебры,* $\forall X \in \mathcal{T}op_*$. $\square$

Несложно проверяется: алгебры над операдой $\mathtt{Mon}$ — это моноиды, алгебры над операдой $\mathtt{Lie}$ — это алгебры Ли, и так далее. Если $f : \mathcal{P} \to \mathcal{O}$ — морфизм операд, то всякая $\mathcal{O}$-алгебра становится $\mathcal{P}$-алгеброй за счёт сквозных отображений $\mathcal{P}(k) \otimes A^{\otimes k} \xrightarrow{f(k) \otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}(k) \otimes A^{\otimes k} \xrightarrow{\theta_k} A$.

4.3. Гомологии операды маленьких дисков.

Определение 4.6. Пусть $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}})$ и $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$ — моноидальные категории. *(Lax-)моноидальный функтор* — это функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ вместе с

естественным преобразованием $\phi_{X,Y} : F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \to F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)$ и морфизмом $\phi : I_{\mathcal{D}} \to F(I_C)$,

[16] Терминология взята из [MZZ20]. Про η уже надо думать как про нейтральный элемент группы/моноида/...

для которых стандартные диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
(F(X)\otimes_{\mathcal D} F(Y))\otimes_{\mathcal D} F(Z) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\phi_{X,Y}\otimes \mathrm{id}"] & & F(X)\otimes_{\mathcal D}(F(Y)\otimes_{\mathcal D} F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\phi_{Y,Z}"] \\
F(X\otimes_{\mathcal C} Y)\otimes_{\mathcal D} F(Z) \arrow[d, "\phi_{X\otimes Y,Z}"] & & F(X)\otimes_{\mathcal D} F(Y\otimes_{\mathcal C} Z) \arrow[d, "\phi_{X,Y\otimes Z}"] \\
F((X\otimes_{\mathcal C} Y)\otimes_{\mathcal C} Z) \arrow[rr, "\cong"] & & F(X\otimes_{\mathcal C}(Y\otimes_{\mathcal C} Z)),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes_{\mathcal D} I_{\mathcal D} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\phi"] \arrow[d, "\cong"] & F(X)\otimes_{\mathcal D} F(I_{\mathcal C}) \arrow[d, "\phi_{X,I_{\mathcal C}}"] \\
F(X) & F(X\otimes_{\mathcal C} I_{\mathcal C}) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I_{\mathcal D}\otimes_{\mathcal D} F(X) \arrow[r, "\phi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"] & F(I_{\mathcal C})\otimes_{\mathcal D} F(X) \arrow[d, "\phi_{I_{\mathcal C},X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal C}\otimes_{\mathcal C} X) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Аналогично, *oplax-моноидальный функтор* $G:\mathcal C\to\mathcal D$ снабжается стрелками $G(X\otimes_{\mathcal C} Y)\to G(X)\otimes_{\mathcal D} G(Y)$, $F(I_{\mathcal C})\to I_{\mathcal D}$.

Функтор *сильно моноидальный*, если $\phi_{X,Y}$ и ϕ — изоморфизмы, то есть $F(X\otimes Y)\cong F(X)\otimes F(Y)$, $F(I)\cong I$.

Примеры:

(1) Взятие сингулярных цепей $C_*(-;\mathbf k):\mathcal Top_*\to\mathcal Ch_{\mathbf k}$ — lax-моноидальный функтор относительно отображений Эйленберга–Зильбера[17] $EZ: C_*(X)\otimes C_*(Y)\to C_*(X\times Y)$.

(2) "отображение Кюннета" $\kappa: H_*(C_\bullet)\otimes H_*(D_\bullet)\to H_*(C_\bullet\otimes D_\bullet)$ задаёт на взятии гомологий $H_*:\mathcal Ch_{\mathbf k}\to\mathcal Mod_{\mathbf k}$ структуру lax-моноидального функтора; если $\mathbf k$ — поле, то он строго моноидальный.

Легко проверяется:

Предложение 4.7. *Пусть $\mathcal O$ — операда в $(\mathcal C,\otimes,I)$, $F:\mathcal C\to\mathcal D$ — lax-моноидальный функтор.*

(1) *$F\mathcal O$ — операда в $\mathcal D$ относительно отображений*

$$F\mathcal O(k)\otimes F\mathcal O(\ell_1)\otimes\cdots\otimes F\mathcal O(\ell_k)\xrightarrow{\varphi_*}F(\mathcal O(k)\otimes\cdots\otimes\mathcal O(\ell_k))\xrightarrow{F(\gamma_k)}F(\mathcal O(\ell_1+\cdots+\ell_k)).$$

(2) *Если $X\in\mathcal C$ — $\mathcal O$-алгебра, то $FX\in\mathcal D$ — $F\mathcal O$-алгебра относительно отображений*

$$F\mathcal O(k)\otimes FX^{\otimes k}\xrightarrow{\varphi_*}F(\mathcal O(k)\otimes X^{\otimes k})\xrightarrow{F(\theta_k)}FX.\quad\square$$

Следствие 4.8. *Если $\mathcal O\curvearrowright X$ — алгебра над топологической операдой, то $C_*(\mathcal O;\mathbf k)\curvearrowright C_*(X;\mathbf k)$. Если $\mathcal P\curvearrowright A$ — алгебра над dg-операдой, то $H(\mathcal P)\curvearrowright H(A)$.* $\square$

Следствие 4.9.
- *$\mathbb E_n:=C_*(\mathcal E_n;\mathbf k)$ — dg-операда;*
- *$\mathsf e_n:=H_*(\mathcal E_n(k);\mathbf k)\cong H_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb R^n);\mathbf k)$ — линейная операда;*
- *$C_*(\Omega^nX;\mathbf k)$ — $\mathbb E_n$-алгебра, и $H_*(\Omega^nX;\mathbf k)$ — $\mathsf e_n$-алгебра.* $\square$

Структура $\mathsf e_n$-алгебры на $H_*(\Omega^nX;\mathbf k)$ сводится к двум геометрически понятным операциям.

Определение 4.10. *Умножение Понтрягина* $H_i(\Omega X;\mathbf k)\otimes H_j(\Omega X;\mathbf k)\to H_{i+j}(\Omega X;\mathbf k)$ индуцировано конкатенацией петель $\mu:\Omega X\times\Omega X\to\Omega X$: а именно, $x\cdot y:=\mu(x\times y)$.

Скобка Браудера $\lambda_n: H_i(\Omega^nX;\mathbf k)\otimes H_j(\Omega^nX;\mathbf k)\to H_{i+j+(n-1)}(\Omega^nX;\mathbf k)$ индуцирована отображением $\theta_2:\mathcal E_n(2)\times\Omega^nX\times\Omega^nX\to\Omega^nX$: а именно, $\lambda_n(x,y):=\theta_*([S^{n-1}]\times x\times y)$.

Теорема 4.11.
(1) $\mathsf e_1\cong\mathtt{Ass}$*, то есть гомологии операды маленьких отрезков — это операда ассоциативных алгебр. Возникающая структура $\mathsf e_1$-алгебры (то есть ассоциативной алгебры) на $H_*(\Omega X;\mathbf k)$ — это умножение Понтрягина. Скобка Браудера — это градуированный коммутатор: $\lambda_1(x,y)=xy-(-1)^{|x|\cdot|y|}yx$.*

(2) *При $n\ge 2$ $\mathsf e_n$ — это n-операда Пуассона (при чётных n также называется* операдой Герштенхабера*). Алгебры над этой операдой — это пуассоновы алгебры $(A,\cdot,[-,-])$, где умножение имеет степень 0, а скобка имеет степень $n-1$.*

[17]и oplax-моноидальный относительно отображений Александера–Уитни; но это нам пока не нужно.

(3) *Структура* e_n*-алгебры на* $H_*(\Omega^n X;\mathbf{k})$ *задаётся умножением Понтрягина и скобкой Браудера.*
(4) *Скобка Уайтхеда на* $\pi_*(X)$ *переходит в скобку Браудера при гомоморфизме Гуревича* $\pi_{*+n}(X)\to H_*(\Omega^n X;\mathbf{k})$.

Доказательство. При $n=1$ имеем $\mathcal{E}_1(k)=\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R})\cong\mathfrak{S}_k\times\mathring{\Delta}^k\simeq\mathfrak{S}_k$, то есть топологическая операда $\mathcal{E}_1$ "гомотопически эквивалентна дискретной операде $\mathtt{Mon}$". Поэтому легко проверить, что $H_*(\mathcal{E}_1;\mathbf{k})\cong H_*(\mathtt{Mon};\mathbf{k})=\mathbf{k}[\mathtt{Mon}]=\mathtt{Ass}$.

При $n\geq 2$ всё следует из наших вычислений в $H_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))=\mathsf{e}_n(k)$. □

Замечание 4.12. Скобка Уайтхеда в группах $\pi_*(\Omega^n X)$ тривиальна при $n\geq 1$.

Теперь изучим "отображения надстройки" $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathcal{E}_n(k)\to\mathcal{E}_{n+1}(k)$. Это морфизм операд $\sigma:\mathcal{E}_n\to\mathcal{E}_{n+1}$, согласованный (задача) с действием на $\Omega^{n+1}X$. Следовательно, он задаёт морфизм операд $\sigma_*:\mathsf{e}_n\to\mathsf{e}_{n+1}$, действующих на $H_*(\Omega^{n+1}X;\mathbf{k})$.

Предложение 4.13. *Морфизм операд* $\sigma_*:\mathsf{e}_n\to\mathsf{e}_{n+1}$ *соответствует следующей структуре* e_n*-алгебры на всякой* e_{n+1}*-алгебре: умножение остаётся тем же, а скобка* λ_n *нулевая.*

Доказательство. Кольцо $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n);\mathbf{k})$ порождено элементами степени n. Поэтому гомоморфизмы $\sigma^*:H^*(\mathcal{E}_{n+1}(k))\to H^*(\mathcal{E}_n(k))$ тривиальны при $*>0$. Дуализуя, получаем: морфизмы градуированных модулей $\mathsf{e}_n(k)\to\mathsf{e}_{n+1}(k)$ тождественны в градуировке 0 (которая отвечает за умножение) и тривиальны в положительных градуировках (которые отвечают за скобку). □

Следствие 4.14. *Скобка Браудера на* $H_*(\Omega^n X;\mathbf{k})$ *тривиальна, если* $X\simeq\Omega Y$. □

Можно также рассмотреть случай $n=\infty$: получатся стягиваемые пространства $\mathcal{E}_\infty(k)=\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^\infty)=E\mathfrak{S}_k$, операда $\mathcal{E}_\infty$, действующая на бесконечнократных пространствах петель, и операда $\mathsf{e}_\infty=\mathtt{Com}$, действующая на их гомологиях $H_*(\Omega^\infty X;\mathbf{k})$.

Замечание 4.15. На скобке Браудера и умножении Понтрягина всё не заканчивается: действия $C_*(\mathcal{E}_n(k);\mathbf{k})\curvearrowleft\mathbb{Z}/k\subset\mathfrak{S}_k$ позволяют построить в группах $H_*(\Omega^n X;\mathbb{F}_p)$ *операции Дайера–Лашофа*, аналогичные операциям Стинрода (мы это обсудим в лекции 7).

4.4. **Монады.** Это ещё одно фундаментальное понятие, связанное с активностями в теории категорий. Мотивирующий пример: "многочлены от многочленов являются многочленами". То есть: по универсальному свойству, морфизм модулей $\mathrm{id}:\mathbf{k}[V]\to\mathbf{k}[V]$ задаёт гомоморфизм алгебр $\mathbf{k}[\mathbf{k}[V]]\to\mathbf{k}[\mathbf{k}[V]]$, то есть естественное преобразование функторов $\mu:\mathbf{k}[-]\circ\mathbf{k}[-]\Rightarrow\mathbf{k}[-]$. Пафос в том, что оно помнит всю категорию коммутативных алгебр.

Определение 4.16. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. *Монада* в $\mathcal{C}$ — это моноид в категории функторов $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, то есть тройка (T,μ,η), где

- $T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ — функтор;
- $\mu:T\circ T\Rightarrow T$ — естественное преобразование (т.е. набор морфизмов $\mu_X:TTX\to TX$ такой, что для всякого морфизма $f:X\to Y$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} TTX \arrow[r, "T(T(f))"] \arrow[d, "\mu_X"] & TTY \arrow[d, "\mu_Y"] \\ TX \arrow[r, "T(f)"] & TY \end{tikzcd}$$

коммутативна);
- $\eta:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow T$ — естественное преобразование (т.е. $\eta_X:X\to TX$, ...);
- $\mu\circ T(\mu)=\mu\circ\mu T$, $\mu\circ T\eta=\mu\circ\eta T=\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, то есть диаграммы ниже коммутативны:

$$\begin{tikzcd} TTTX \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{TX}"] & TTX \arrow[d, "\mu_X"] \\ TTX \arrow[r, "\mu_X"] & TX, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TX \arrow[r, "\eta_{TX}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TX}"] & TTX \arrow[d, "\mu_X"] \\ TTX \arrow[r, "\mu_X"] & TX. \end{tikzcd}$$

Определение 4.17. Пусть (T, μ, η) — монада в категории $\mathcal{C}$. *Алгебра* над $\mathcal{C}$ — это пара (X, θ), где $X \in \mathcal{C}$ — объект, $\theta : TX \to X$ — морфизм, причём следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} TTX \arrow[r, "T(\theta)"] \arrow[d, "\mu_X"] & TX \arrow[d, "\theta"] \\ TX \arrow[r, "\theta"] & X, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & TX \arrow[d, "\theta"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

Категорию T-алгебр обозначим как $T[\mathcal{C}]$. Определения довольно абстрактные. Следующие три упражнения совершенно необходимо проделать, чтобы их прочувствовать.

Предложение 4.18. *Пусть (T, μ, η) — монада в $\mathcal{C}$. Тогда*

(1) *Для любого $X \in \mathcal{C}$ объект $TX \in \mathcal{C}$ является T-алгеброй относительно действия $\theta = \mu_X : TTX \to TX$.*

(2) *TX — свободная T-алгебра, т.е. имеем*

$$\mathrm{Hom}_{T[\mathcal{C}]}((TX, \mu_X), (A, \theta)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A), \quad \forall (A, \theta) \in \mathcal{C}[T].$$

Это пара сопряжённых функторов $\widehat{T} := (T, \mu) : \mathcal{C} \rightleftarrows T[\mathcal{C}] : Forget_T$ (“сопряжённость Эйленберга–Мура”).

Доказательство. Упражнение. □

Обратно, основной источник монад — это пары сопряжённых функторов. Напоминание: пусть $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ — такая пара, то есть имеем естественные биекции $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. Если подставить $\mathrm{id}_{G(Y)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y))$ справа и $\mathrm{id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X))$ слева, то возникают единица и коединица сопряжения: естественные преобразования $\varepsilon_Y : FGY \to Y$ и $\eta_X : X \to GFX$ такие, что

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[d, "F(\eta_X)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{FX}"] & \\ FGFX \arrow[r, "\varepsilon_{FX}"'] & FX \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GY \arrow[r, "\eta_{GY}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GY}"'] & GFGY \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \\ & GY. \end{tikzcd}$$

Предложение 4.19. *Если $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ — сопряжённые функторы, то $T = GF$ — монада относительно $\mu_X := G(\varepsilon_{FX}) : G(FG(FX)) \to G(FX)$ и $\eta_X := \eta_X : X \to GFX$.*

Если применить эту конструкцию к сопряжённости Эйленберга–Мура, то получится в точности монада T.

Доказательство. Упражнение. □

Предложение 4.20. *Если $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ — пара сопряжённых функторов, то для любого $Y \in \mathcal{D}$ монада GF действует на объекте $GY \in \mathcal{C}$ следующим образом:*

$$\theta = G(\varepsilon_Y) : GF(GY) = G(FGY) \to G(Y) = GY.$$

Таким образом, функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ естественно продолжается до функтора $\widehat{G} : \mathcal{D} \to GF[\mathcal{C}]$.

Доказательство. Упражнение. □

Поймём, что произошло, на примере монады $\mathbf{k}[-]$. Здесь, на самом деле, рассматривались функторы $\mathbf{k}[-] : \mathbf{k}\mathcal{M}od \rightleftarrows \mathbf{k}\mathcal{C}omm\mathcal{A}lg : Forget$; наша монада имеет вид $T = G \circ F$. Согласно предложению выше, модуль $Forget(\mathbf{k}[V])$ — свободная алгебра над этой монадой. На самом деле получаем эквивалентность категорий $T[\mathbf{k}\mathcal{M}od] \cong \mathbf{k}\mathcal{C}omm\mathcal{A}lg$, т.е. в данном примере функтор $\mathcal{D} \to GF[\mathcal{C}]$ оказался эквивалентностью: пара сопряжённых функторов *монадична*. (Понять, какие сопряжённости таковы, можно из *теоремы Барра–Бека о монадичности*).

5. Операды и монады II (9 марта)

В прошлый раз мы обсудили операду $\mathcal{E}_n$ в $\mathcal{T}op$. Мы движемся к следующей теореме.

Теорема 5.1 (Принцип распознавания (в формулировке Мэя))**.** *Пусть $1 \leq n \leq \infty$.*

(1) *Если $Y \in \mathcal{T}op_*$, то $\Omega^n Y$ — $\mathcal{E}_n$-алгебра (это мы уже доказали).*

(2) *Если X — линейно связная $\mathcal{E}_n$-алгебра, то $X \simeq \Omega^n Y$ для некоторого $Y \in \mathcal{T}op_*$ (и это слабая гомотопическая эквивалентность $\mathcal{E}_n$-алгебр).*

Операды нужны, чтобы её сформулировать, а монады — чтобы её доказать.

Пространство Y даже можно предъявить явно: это монадная бар-конструкция $\mathrm{Bar}(\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, X)$ — геометрическая реализация симплициального пространства, составленного из пространств вида $\Sigma^n T_{\mathcal{E}_n}(T_{\mathcal{E}_n}(\dots T_{\mathcal{E}_n}(X)\dots)))$; гомотопическая эквивалентность $X \to \Omega^n Y$ сопряжена к вложению $\Sigma^n X \hookrightarrow \mathrm{Bar}(\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, X)$. Монаду $T_{\mathcal{E}_n}$ в $\mathcal{T}op_*$ мы построим уже сегодня.

Замечание 5.2. Если $\mathcal{E}_n$-алгебра X не линейно связна, то это не обязательно n-кратное пространство петель. Действительно: топологический моноид является $\mathcal{E}_1$-алгеброй (за счёт морфизма операд $\mathcal{E}_1 \to \pi_0(\mathcal{E}_1) = \mathtt{Mon}$), но не обязательно гомотопически эквивалентен пространству петель. На самом деле: *групповое пополнение* $M \to \Omega BM$ — ГЭ $\Leftrightarrow$ дискретный моноид $\pi_0(M)$ является группой. Например, $\Omega B\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$. Детали см. в лекции 11.

5.1. **Резюме прошлой лекции.** Есть два способа кодировать алгебраические структуры: через операды и через монады. Монады удобнее, потому что это совершенно общая конструкция, а ещё свободные алгебры над монадой (T, μ, η) очень легко описать: это алгебры вида (TX, μ_X), $X \in \mathcal{C}$. Но категорию T-алгебр сложно описать. Операды удобнее, потому что категорию $\mathcal{O}$-алгебр можно описать комбинаторно (как и все алгебраические структуры, с которыми мы обычно встречаемся). Свободные $\mathcal{O}$-алгебры можно описать, связав операды с монадами.

5.2. **Монада, соответствующая операде.** Далее мы будем предполагать, что в $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ есть счётные копределы, причём $X \otimes (Y_1 \sqcup Y_2) \cong X \otimes Y_1 \sqcup X \otimes Y_2$.

Замечание 5.3. Второе условие выполнено, если $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ — *замкнутая*[18] симметрическая моноидальная категория — потому что левый сопряжённый функтор коммутирует с копределами. Вообще, для удобства можно считать, что $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ — *космос Бенабý* (<u>ко</u>тегория <u>с</u>имметричная <u>мо</u>ноидальная, <u>с</u>о всеми пределами и копределами, замкнутая.)

Краткое напоминание про действия групп. Действием группы G на объекте $X \in \mathcal{C}$ называется гомоморфизм групп $G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$, то есть согласованный набор морфизмов $\alpha_g : X \to X$.

Если в $\mathcal{C}$ есть (конечные) копределы, для объекта $X \curvearrowleft G$ с действием (конечной) группы G определён объект X/G: это копредел диаграммы из категории с одним объектом $*_G \to \mathcal{C}$, $* \mapsto X$, $g \mapsto \alpha_g$. Морфизм проекции $X \to X/G$ задаётся универсальным свойством: всякий G-инвариантный[19] морфизм $X \to Y$ пропускается через него.

Следовательно, если $X \curvearrowleft G \curvearrowright Y$, то определён объект $X \otimes_G Y := (X \otimes Y)/G$, где действие G диагональное. По определению, морфизмы $X \otimes_G Y \to Z$ взаимно-однозначно соответствуют G-*инвариантным* морфизмам $f : X \otimes Y \to Z$, то есть таким морфизмам, что "$f(x.g, y) = f(x, g.y)$": диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[r, "(-).g\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g.(-)"'] & X \otimes Y \arrow[d, "f"] \\ X \otimes Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd} \quad \text{коммутативна, } \forall g \in G.$$

Теорема 5.4. *Пусть $\mathcal{O}$ — операда в $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. Тогда*

(1) *функтор*

$$\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X) := \bigsqcup_{k \geq 0} \mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} X^{\otimes k}$$

является монадой в $\mathcal{C}$;

(2) *категории $\mathcal{O}$-алгебр и $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}$-алгебр естественно эквивалентны;*

(3) *$\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X)$ — свободная $\mathcal{O}$-алгебра.*

Замечание 5.5. Иногда вместо $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X)$ пишут $O(X)$ или $\mathcal{O}(X)$, но так мы совсем запутаемся.

[18] т.е. если у функтора $X \otimes (-)$ есть правый сопряжённый функтор $\underline{\mathrm{Hom}}(X, -)$ ("внутренний Hom").

[19] Упражнение: понять, что это такое

Набросок доказательства. (1) Структура монады такая: сначала с помощью композиций γ_k построим

$$\mathcal{O}(k) \otimes \Big(\bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{O}(\ell_i) \otimes X^{\otimes \ell_i} \Big) \xrightarrow{\gamma_k^{\ell_1,\dots,\ell_k}} \mathcal{O}(\ell) \otimes X^{\otimes \ell} \to \mathcal{O}(\ell) \otimes_{\mathfrak{S}_\ell} X^{\otimes \ell} \hookrightarrow \widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X), \quad \ell = \sum_{i=1}^{k} \ell_i.$$

Эти морфизмы в правильном смысле эквивариантны, поэтому из них можно склеить корректно определённый морфизм $\mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X)^{\otimes k} \to \widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X)$. Взяв копроизведение, получаем морфизм $\mu_X : \widetilde{T}_{\mathcal{O}}(\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X)) \to \widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X)$, естественный по X. Единица монады — это естественное вложение

$$\eta : X \cong I \otimes X \xrightarrow{1 \otimes X} \mathcal{O}(1) \otimes X = \mathcal{O}(1) \otimes_{\mathfrak{S}_1} X^{\otimes 1} \hookrightarrow \widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X).$$

Ассоциативность μ сводится к ассоциативности γ, унитальность η сводится к унитальности $1 : I \to \mathcal{O}(1)$.

(2) Действие операды $\mathcal{O}$ на объекте X — это набор $\mathfrak{S}_k$-инвариантных морфизмов $\theta_k : \mathcal{O}(k) \otimes X^{\otimes k} \to X$, а это то же самое, что морфизм $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X) \to X$. Ассоциативность и согласованность с единицей операды переходит в ассоциативность и согласованность с единицей монады.

(3) По предложению ..., $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(X)$ — свободная $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}$-алгебра (а по пункту (2), это то же самое, что свободная $\mathcal{O}$-алгебра). □

Рассмотрим пару примеров.

(1) Mon — операда в $(\mathcal{S}et, \times, *)$, $\mathtt{Mon}(k) = \mathfrak{S}_k$. Получаем, что свободный моноид на множестве X имеет вид $\widetilde{T}_{\mathtt{Mon}}(X) = \bigsqcup_{k\ge 0} \mathfrak{S}_k \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\times k} = \bigsqcup_{k \ge 0} X^{\times k}$. Это действительно так: элементы свободного моноида — это слова в алфавите X.

(2) Com — операда в $(\mathbf{k}\mathcal{M}od, \otimes_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, $\mathtt{Com}(k) = \mathbf{k}$. Свободная коммутативная алгебра, порождённая $\mathbf{k}$-модулем M, имеет вид $\widetilde{T}_{\mathtt{Com}}(M) = \bigoplus_{k\ge 0} \mathbf{k} \otimes_{\mathfrak{S}_k} M^{\otimes k} = \bigoplus_{k \ge 0} (M^{\otimes k})_{\mathfrak{S}_k}$. Это и есть симметрическая алгебра.

(3) Если $\mathcal{O}$ — линейная операда, то свободная $\mathcal{O}$-алгебра от одной образующей x степени q — это $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(\mathbf{k} \cdot x) = \bigoplus_{k \ge 0} \mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \mathbf{k}(q)$ (второй тензорный множитель — знаковое представление $\mathfrak{S}_k$ при нечётных d и тривиальное представление при нечётных). Действительно: $(\mathbf{k} \cdot x)^{\otimes k} \simeq \mathbf{k}(|x|)$ как $\mathfrak{S}_k$-модуль. Поэтому, например,

$$\widetilde{T}_{\mathtt{Lie}}(x\mathbf{k}) = \bigoplus_{k \ge 0} (\mathtt{Lie}(k) \otimes \mathbf{k}(|x|))_{\mathfrak{S}_k} = \begin{cases} x\mathbf{k} \oplus [x,x]\mathbf{k} \oplus [x,[x,x]]\mathbf{k}/(3), & |x| \text{ нечётно;} \\ x\mathbf{k} \oplus [x,x]\mathbf{k}/(2), & |x| \text{чётно.} \end{cases}$$

Замечание 5.6. Здесь мы, на самом деле, рассмотрели *квази-алгебры Ли*, а не алгебры Ли: в алгебрах Ли обычно отдельно накладывают условие $[x,x] = 0$ для чётных x и $[x,[x,x]] = 0$ для нечётных x. Без этих условий (и если не требовать $6 \notin \mathbf{k}^{\times}$) неверно, что свободная алгебра Ли вкладывается в свободную ассоциативную алгебру.

5.3. **Алгебры над операдами с отмеченной точкой.** Заметим: если $(\mathcal{O}, \eta)$ — операда с отмеченной точкой в $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, то для всякой $\mathcal{O}$-алгебры (X, θ) возникает морфизм

$$I \xrightarrow{\eta} \mathcal{O}(0) = \mathcal{O}(0) \otimes_{\mathfrak{S}_0} X^{\otimes 0} \xrightarrow{\theta_0} X.$$

Получаем объект слайс-категории[20] $(X, \theta \circ \eta) \in I/\mathcal{C}$.

Определение 5.7. Пусть $(\mathcal{O}, \eta)$ — операда с отмеченной точкой в $\mathcal{C}$, и пусть $(X, \eta') \in I/\mathcal{C}$. Структура *$\mathcal{O}$-алгебры с отмеченной точкой* (или просто *$(\mathcal{O}, \eta)$-алгебры*) на (X, η') — это такая структура $\mathcal{O}$-алгебры на X, что $\eta' = \theta_0 \circ \eta$.

Например, пусть нам дано пространство с отмеченной точкой, $x_0 \in X$, и мы хотим на нём задать структуру топологического моноида (то есть умножение $m : X \times X \to X$ и единицу $e \in X$). Мы ожидаем, что $e = x_0$. Это требование выделяет $(\mathtt{TopMon}, \eta)$-алгебры в $\mathcal{T}op_*$ среди TopMon-алгебр в $\mathcal{T}op$.

Ещё пример: $\mathcal{E}_n$ — операда в $\mathcal{T}op$ с отмеченной точкой (канонически: $\mathcal{E}_n(0) = *$). Для всякого $Y \in \mathcal{T}op_*$ объект $\Omega^n Y \in \mathcal{T}op_*$ является $\mathcal{E}_n$-алгеброй с отмеченной точкой (то есть, $\Omega^n Y \in \mathcal{T}op$ —

[20] Для объекта $A \in \mathcal{C}$ его слайс-категория $A/\mathcal{C}$ — это категория пар (X, f), где $f : A \to X$ — морфизм в $\mathcal{C}$.

такая $\mathcal{E}_n$-алгебра, что $\theta_0 : * \to \Omega^n Y$ — это отмеченная точка).

При $1 \le j \le k$ введём морфизмы "подстановки отмеченной точки" $d_{k,j} : \mathcal{O}(k) \to \mathcal{O}(k-1)$,

$$d_{k,j} : \mathcal{O}(k) \cong \mathcal{O}(k) \otimes I^{\otimes k} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes 1^{\otimes j-1} \otimes \eta \otimes 1^{\otimes k-j}} \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes j-1} \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes k-j} \xrightarrow{\gamma_k^{1,\dots,1,0,1,\dots,1}} \mathcal{O}(k-1).$$

Если (X, θ) — $\mathcal{O}$-алгебра, то фиксация отмеченной точки $\eta' : I \to X$ накладывает дополнительные соотношения на морфизмы θ_k. А именно, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(k) \otimes X^{\otimes j-1} \otimes I \otimes X^{k-j} \arrow[r, "d_{k,j} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}^{j-1} \otimes \eta' \otimes \mathrm{id}^{k-j}"'] & \mathcal{O}(k-1) \otimes X^{\otimes k-1} \arrow[d, "\theta_{k-1}"] \\
\mathcal{O}(k) \otimes X^{\otimes k} \arrow[r, "\theta_k"] & X.
\end{tikzcd}$$

Теорема 5.8. *Пусть $(\mathcal{O}, \eta)$ — операда с отмеченной точкой. Тогда*

(1) *В категории $I/\mathcal{C}$ определена монада*

$$T_{\mathcal{O}}(X, \eta') := \Big(\coprod_{k \ge 0} \mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} X^{\otimes k} \Big) / \sim, \quad \text{“}[o; x_1, \dots, x_j, \dots, x_k] \sim [d_{k,j}(o); x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_k],\ x_j = *\text{”}$$

(чуть более формально, $T_{\mathcal{O}}(X, \eta')$ — это коуравнитель диаграммы

$$\textstyle\coprod_{k \ge 1} \coprod_{j=1}^{k} \mathcal{O}(k) \otimes X^{k-1} \underset{\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}^{j-1} \otimes \eta' \otimes \mathrm{id}^{k-j}}{\overset{d_{k,j} \otimes \mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \coprod_{k \ge 0} \mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} X^{\otimes k}\ );$$

(2) *категории $(\mathcal{O}, \eta)$-алгебр с отмеченной точкой и $T_{\mathcal{O}}$-алгебр в $I/\mathcal{C}$ эквивалентны;*

(3) *Для $(X, \eta') \in I/\mathcal{C}$ имеем: $I \to T_{\mathcal{O}}(X, \eta')$ — свободная $(\mathcal{O}, \eta)$-алгебра, порождённая (X, η').*

Доказательство. Проверка, аналогичная предыдущей теореме. □

Следствие 5.9. *Пусть $(X, *) \in \mathcal{T}op_*$.*

(1) *Свободный топологический моноид с отмеченной точкой, порождённый $(X, *)$ — это конструкция Джеймса*

$$J(X) := T_{\mathtt{TopMon}}(X) = \Big(\coprod_{k \ge 0} X^{\times k} \Big) / \sim, \quad (x_1, \dots, x_j, \dots, x_k) \sim (x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_k),\ x_j = *;$$

(2) *Свободный коммутативный топологический моноид с отмеченной точкой, порождённый $(X, *)$ — это бесконечная симметрическая степень*

$$T_{\mathtt{TopCommMon}}(X) = \Big(\coprod_{k \ge 0} X^{\times k} / \mathfrak{S}_k \Big) / \sim = \mathrm{colim}_k\, SP^k(X) =: SP^\infty(X), \quad SP^k(X) := X^{\times k} / \mathfrak{S}_k;$$

(3) *Свободная $\mathcal{E}_n$-алгебра, порождённая $(X, *)$ — это*

$$T_{\mathcal{E}_n}(X) = \Big(\coprod_{k \ge 0} \mathcal{E}_n(k) \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\times k} \Big) / \sim, \quad [d_{k,j}(c); x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_k] \sim [c; x_1, \dots, x_j, \dots, x_k],\ x_j = *,$$

где $d_{k,j} : \mathcal{E}_n(k) \to \mathcal{E}_n(k-1)$ — это выкидывание j-ого маленького диска. □

Точки пространства $T_{\mathcal{E}_n}(X)$ — это конечные неупорядоченные наборы непересекающихся маленьких n-дисков, где каждому диску приписана метка из X, с точностью до соотношений: диск можно добавить или убрать, если его метка равна $* \in X$. Структура монады такая:

- $T_{\mathcal{E}_n}(T_{\mathcal{E}_n}(X))$ — это набор дисков, каждому из которых соотвествует набор дисков с метками из X; отображение $\mu_X : T_{\mathcal{E}_n}(T_{\mathcal{E}_n}(X)) \to T_{\mathcal{E}_n}(X)$ — это "подстановка дисков в диски и стирание промежуточных дисков";
- Отображение $\eta_X : X \to T_{\mathcal{E}_n}(X)$ сопоставляет точке $x \in X$ один маленький диск $\mathrm{id} : (0,1)^n \to (0,1)^n$ с меткой x.

Вместо дисков можно рассматривать и точки (мы вернёмся к этому в лекции 9).

5.4. **Действие на кратных пространствах петель.** Мы уже знаем:

(1) Операда $\mathcal{E}_n$ действует на $\Omega^n X$ для всех $X \in \mathcal{T}op_*$;
(2) Сопряжённость $\Sigma^n \dashv \Omega^n$ задаёт монаду $\Omega^n\Sigma^n$ в $\mathcal{T}op_*$, которая действует на любом $\Omega^n X$;
(3) Операда $\mathcal{E}_n$ задаёт монаду $T_{\mathcal{E}_n}$ в $\mathcal{T}op_*$.

Это не случайность:

Предложение 5.10. *Имеем морфизм монад $\sigma : T_{\mathcal{E}_n} \Rightarrow \Omega^n\Sigma^n$, согласованный с действием на $\Omega^n Y$, $Y \in \mathcal{T}op_*$.*

Схема доказательства. Морфизм определён так: всякая точка $x \in X$ задаёт отображение $[0,1]^n \to S^n = S^n \wedge \{x\} \to S^n \wedge X = \Sigma^n X$. Значит, набор точек $(x_1, \dots, x_k)$ вместе с набором непересекающихся n-дисков $f_1 \sqcup \dots \sqcup f_k : ((0,1)^n)^{\sqcup k} \hookrightarrow (0,1)^n$ склеивается в отображение $S^n \to \Sigma^n X$, то есть элемент в $\Omega^n\Sigma^n X$. Это и есть наш морфизм $\sigma_X : T_{\mathcal{E}_n}(X) \to \Omega^n\Sigma^n X$. Ясно, что это естественное отображение $\sigma : T_{\mathcal{E}_n} \Rightarrow \Omega^n\Sigma^n$.

Проверим, что это морфизм монад. Согласованность с единицей понятна (получаем в точности стандартный морфизм $X \to \Omega^n\Sigma^n X$). Дальше надо проверить коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathcal{E}_n}(T_{\mathcal{E}_n}(X)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\sigma\circ\sigma"] & T_{\mathcal{E}_n}(X) \arrow[d, "\sigma"] \\
\Omega^n\Sigma^n\Omega^n\Sigma^n X \arrow[r, "\Omega^n(ev_{\Sigma^n X})"] & \Omega^n\Sigma^n X,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_{\mathcal{E}_n}(\Omega^n Y) \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, "\theta_n"] & \\
\Omega^n\Sigma^n\Omega^n Y \arrow[r, "\Omega^n(ev_Y)"'] & \Omega^n Y
\end{tikzcd}$$

где $ev : \Sigma^n\Omega^n Y \to Y$, $(t, f) \mapsto f(t)$. Это мучительное упражнение. □

Сейчас мы выведем теорему Мэя о распознавании из следующего результата. Это частный случай “теоремы об аппроксимации”, которую мы докажем в лекции 9.

Теорема 5.11 (Милгрэм, Мэй)**.** *Пусть X линейно связно. Тогда $\sigma : T_{\mathcal{E}_n}(X) \to \Omega^n\Sigma^n X$ — слабая ГЭ.* □

5.5. **Схема доказательства теоремы о распознавании.**

Определение 5.12. Пусть (T, μ, η) — монада в $\mathcal{C}$. *Правый T-модуль* в категории $\mathcal{D}$ — это функтор $M : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ вместе с естественным преобразованием $m : M \circ T \Rightarrow M$ таким, что

$$\begin{tikzcd}
MTTX \arrow[r, "M(\mu_X)"] \arrow[d, "m_{TX}"] & MTX, \arrow[d, "m_X"] \\
MTX \arrow[r, "m_X"] & MX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
MX \arrow[r, "M(\eta_X)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & MTX \arrow[d, "m_X"] \\
& MX.
\end{tikzcd}$$

Предложение 5.13. (1) *Всякая монада — правый модуль над собой.*
(2) *Если M — правый T-модуль и $\sigma : T' \Rightarrow T$ — морфизм монад, то M — правый T'-модуль.*
(3) *Пусть $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ — пара сопряжённых функторов. Тогда F — правый модуль над монадой GF.*

Доказательство. Упражнение. □

Следствие 5.14. *$T_{\mathcal{E}_n}$, $\Omega^n\Sigma^n$, Σ^n — правые $T_{\mathcal{E}_n}$-модули.* □

Определение 5.15. Пусть (T, μ, η) — монада в $\mathcal{C}$, (M, m) — правый T-модуль в $\mathcal{D}$, и (X, θ) — T-алгебра,

$$\mathcal{D} \xleftarrow{M} \mathcal{C} \xleftarrow{T} \mathcal{C} \ni X.$$

Соответствующая *бар-конструкция* $\mathrm{Bar}_\bullet(M, T, X)$ — это следующий симплициальный объект в $\mathcal{D}$:

$$\mathrm{Bar}_k(M, T, X) := MT^kX \in \mathcal{D}, \quad k \geq 0,$$

где отображения граней $d_j : \mathrm{Bar}_k \to \mathrm{Bar}_{k-1}$ индуцированы морфизмами умножениями m, μ, θ, а отображения вырождения $s_j : \mathrm{Bar}_k \to \mathrm{Bar}_{k+1}$ — единицей η. Подробнее:

$$d_0 = m_{T^{k-1}X} : MT^kX = MT(T^{k-1}X) \to M(T^{k-1}X) = MT^{k-1}X,$$
$$d_i = MT^{i-1}(\mu_{T^{k-i-1}X}) : MT^kX = MT^{i-1}(TT(T^{k-i-1}X)) \to MT^{i-1}(T(T^{k-i-1}X)) = MT^{k-1}X,\ 1 \leq i \leq k-1,$$
$$d_k = MT^{k-1}(\theta) : MT^kX = MT^{k-1}(TX) \to MT^{k-1}(X) = MT^{k-1}X,$$
$$s_i = MT^i(\eta_{T^{k-i}X}) : MT^kX = MT^i(T^{k-i}X) \to MT^i(T(T^{k-i}X)) = MT^{k+1}X,\ 0 \leq i \leq k.$$

В частности, для всякой $\mathcal{E}_n$-алгебры X определены симплициальные топологические пространства $\mathrm{Bar}_\bullet(M, T_{\mathcal{E}_n}, X)$, $M = T_{\mathcal{E}_n}, \Omega^n\Sigma^n, \Sigma^n$.

Схема доказательства теоремы Мэя о распознавании ($n < \infty$). Пусть X — связная $\mathcal{E}_n$-алгебра. Мы хотим построить слабую гомотопическую эквивалентность $\mathcal{E}_n$-алгебр $X \to \Omega^n Y$ для некоторого $Y \in \mathcal{T}op_*$. Пусть $|-| : s\mathcal{T}op_* \to \mathcal{T}op_*$ — функтор геометрической реализации. Корректно определены морфизмы $|\Omega\mathrm{Bar}_\bullet| \to \Omega|\mathrm{Bar}_\bullet|$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
{|\mathrm{Bar}_\bullet(T_{\mathcal{E}_n}, T_{\mathcal{E}_n}, X)|} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, "|\mathrm{Bar}_\bullet(\sigma,\mathrm{id},\mathrm{id})|"', "\simeq"] & & X \arrow[d, "i_*"] \\
{|\mathrm{Bar}_\bullet(\Omega^n\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, X)|} \arrow[r, equal] & {|\Omega^n\mathrm{Bar}_\bullet(\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, X)|} \arrow[r, "\simeq"] & \Omega^n|\mathrm{Bar}_\bullet(\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, X)|.
\end{tikzcd}$$

- Верхняя стрелка — ГЭ, так как “это бар-резольвента”;
- Левая стрелка — ГЭ по теореме аппроксимации:
  - Если Y связно, то $T_{\mathcal{E}_n}(Y)$ связно;
  - $T_{\mathcal{E}_n}(Y) \to \Omega^n\Sigma^n Y$ — ГЭ для связных Y, поэтому морфизм симплициальных пространств $\mathrm{Bar}_\bullet(\sigma, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ — покомпонентная ГЭ;
  - геометрическая реализация переводит покомпонентные ГЭ в ГЭ;
- Нижняя стрелка — ГЭ (это общий факт: $\Omega|X_\bullet| \simeq |\Omega X_\bullet|$, если все X_k связны);
- Правая стрелка, сопряжённая к вложению $\Sigma^n X = \mathrm{Bar}_0(\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, X) \hookrightarrow |\mathrm{Bar}_\bullet(\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, X)|$, — морфизм $\mathcal{E}_n$-алгебр (проверяется).

Значит, i_* — ГЭ и гомоморфизм $\mathcal{E}_n$-алгебр. □

Замечание 5.16. Аналогично (и даже чуть проще) доказывается: всякая связная $\Omega^n\Sigma^n$-алгебра гомотопически эквивалентна n-кратному пространству петель.

6. Ещё немного о маленьких дисках (16 марта)

6.1. **Маленькие диски на многообразиях.** В прошлый раз мы рассматривали правые модули над монадами: это естественные преобразования функторов, $M \circ T \Rightarrow T$. Аналогично определяются правые модули над операдами:

Определение 6.1. Пусть $\mathcal{O}$ — монада в $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. *Правый $\mathcal{O}$-модуль* — это симметрическая последовательность $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(k) \curvearrowleft \mathfrak{S}_k : k \geq 0\}$ в $\mathcal{C}$ вместе с эквивариантными отображениями

$$\mu_k^{\ell_1,\dots,\ell_k} : \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}(\ell_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(\ell_k) \to \mathcal{M}(\ell_1 + \dots + \ell_k)$$

такими, что выполнены условия ассоциативности (ясно, какие) и аксиома единицы: композиция

$$\mathcal{M}(k) \cong \mathcal{M}(k) \otimes I^{\otimes k} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes 1^{\otimes k}} \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes k} \xrightarrow{\gamma_k^{1,\dots,1}} \mathcal{M}(k)$$

— это тождественный морфизм.

Вот пример правого модуля: если M — гладкое n-мерное многообразие, то можно рассмотреть наивные пространства маленьких дисков,

$$\mathcal{E}'_M(k) := \{\text{гладкие вложения } (D^n)^{\sqcup k} \hookrightarrow M\}.$$

Ясно, что $\mathcal{E}'_M$ — правый $\mathcal{E}_n$-модуль; поэтому $H_*(\mathcal{E}'_M; \mathbf{k})$ — правый $\mathtt{e}_n$-модуль. Эту структуру можно использовать, чтобы лучше понять гомологии пространств $\mathrm{Conf}_k(M)$... Подвох в том, что $\mathcal{E}'_M(k) \not\simeq \mathrm{Conf}_k(M)$. Дело в том, что гладкое вложение, помимо центров дисков, помнит ещё базис в касательном пространстве. На самом деле $\mathcal{E}'_M(k) \simeq \mathrm{Conf}_k^{\mathrm{fr}}(M)$, где *обрамлённое*[21] конфигурационное пространство $\mathrm{Conf}_k^{\mathrm{fr}}(M)$ определяется как пулбэк

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Conf}_k^{\mathrm{fr}}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fr}(\mathcal{T}M)^{\times k} \arrow[d] \\
\mathrm{Conf}_k(M) \arrow[r] & M^{\times k}
\end{tikzcd}$$

[21] Framed. По-русски иногда говорят “оснащённое”, но словом “оснащение” переводят более модные понятия enrichment и enhancement...

(а $\mathrm{Fr}(\xi)$ — тотальное пространство расслоения реперов для векторного расслоения ξ.) Таким образом, имеем главное расслоение

$$GL_n(\mathbb{R})^{\times k} \to \mathrm{Conf}_k^{\mathrm{fr}}(M) \to \mathrm{Conf}_k(M).$$

Если многообразие M *параллелизуемо* (т.е. $\mathcal{T}M \simeq \underline{\mathbb{R}}^n$), то выберем его обрамление (тривиализацию касательного расслоения) $t : \mathcal{T}M \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathbb{R}}^n$; тогда можно определить пространства обрамлённых маленьких n-дисков в M,

$$\mathcal{E}_M(k) := \{\iota : (D^n)^{\sqcup k} \hookrightarrow M \mid \mathbb{R}^n \cong T_{o_j}D^n \xrightarrow{d_{o_j}\iota} T_{\iota(o_j)}M \xrightarrow{t_*} \mathbb{R}^n \text{ — тождественное отображение}\}.$$

Тогда взятие центров дисков $\mathcal{E}_M(k) \to \mathrm{Conf}_k(M)$ — ГЭ, и $\mathcal{E}_M$ — правый $\mathcal{E}_n$-модуль. (Кроме того, в этом случае $\mathrm{Conf}_k^{\mathrm{fr}}(M) \cong GL_n(\mathbb{R})^{\times k} \times \mathrm{Conf}_k(M)$.)

6.2. **Связность пространств $\mathcal{O}(k)$.** Про $\mathcal{E}_n$-алгебры надо думать так:
- $\mathcal{E}_1$-алгебры — “это, с точностью до гомотопии, ассоциативные топологические моноиды”;
- $\mathcal{E}_\infty$-алгебры — “это, с точностью до гомотопии, коммутативные и ассоциативные топологические моноиды”;
- При $1 < n < \infty$, $\mathcal{E}_n$-алгебры — “это, с точностью до гомотопии, ассоциативные и до некоторой степени коммутативные топологические моноиды”.

Сейчас мы это отчасти обоснуем. Вспомним: пространства k-арных операций $\mathcal{E}_n(k) \simeq \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ — $(n-2)$-связны; при этом $\mathcal{E}_n(0) = \mathrm{pt}$, $\mathcal{E}_n(1) = \mathbb{R}^n \simeq \mathrm{pt}$ и $\mathcal{E}_n(2) \simeq S^{n-1}$.

Предложение 6.2. *Пусть $\mathcal{O}$ — топологическая операда с отмеченной точкой, X — $\mathcal{O}$-алгебра с отмеченной точкой e. Пусть $\mu \in \mathcal{O}(2)$, и $\mu = \theta_2(\mu; -, -) : X \times X \to X$ — соответствующее умножение на X.*

(1) *Если $\mathcal{O}(2)$ линейно связно, то любые два умножения $\mu, \mu' \in \mathcal{O}(2)$ гомотопны.*
(2) *Если $\mathcal{O}(1)$ линейно связно, то (X, μ, e) — H-пространство.*
(3) *Если $\mathcal{O}(2)$ линейно связно, то μ гомотопически коммутативно.*
(4) *Если $\mathcal{O}(3)$ линейно связно, то μ гомотопически ассоциативно.*
(5) *Если все $\mathcal{O}(k)$ линейно связны, то всякая k-арная операция гомотопна k-кратному умножению $\mu(x_1, \mu(x_2, \dots \mu(x_{k-1}, x_k) \dots))$.*

Доказательство. (1) Действительно, путь из μ в μ' задаёт гомотопию между $\theta_2(\mu; -, -)$ и $\theta_2(\mu'; -, -)$.

(2) Надо доказать, что $\mathrm{id}_X \sim \mu(e, -) \sim \mu(-, e)$. Заметим, что

$$\mu(e, -) = \theta_2(\mu; 1, -) = \theta_2(\mu; \theta_0(*), \theta_1(1; -)) = \theta_1(\gamma_2^{0,1}(*, 1); -), \quad \mathrm{id}_X = \theta_1(1; -).$$

Так как $\mathcal{O}(1)$ линейно связно, существует путь $\gamma_2^{0,1}(*, 1) \rightsquigarrow 1$. Значит, эти отображения гомотопны. Аналогично, путь $1 \rightsquigarrow \gamma_2^{1,0}(*, 1)$ задаёт гомотопию $\mathrm{id}_X \sim \mu(-, e)$.

(3) Пусть $\tau = (1\,2) \in \mathfrak{S}_2$, и пусть $\mu' = \tau.\mu \in \mathcal{O}(2)$. Имеем $\mu(y, x) = \theta_2(\mu; y, x) = \theta_2(\mu.\tau; x, y)$. Так как $\mathcal{O}(2)$ линейно связно, существует путь между μ и $\mu.\tau$.

(4) Имеем

$$\mu(\mu(x, y), z) = \theta_2(\mu; \theta_2(x, y); \theta_1(1; z)) = \theta_3(\gamma_2^{2,1}(\mu; \mu, 1); x, y, z), \quad \mu(x, \mu(y, z)) = \theta_3(\gamma_2^{1,2}(\mu; 1, \mu); x, y, z).$$

Путь между $\gamma_2^{2,1}(\mu; \mu, 1)$ и $\gamma_2^{1,2}(\mu; 1, \mu)$ задаёт гомотопию между этими отображениями.

(5) Она задаётся элементом $\gamma_2^{1,k-1}(\mu; 1, \gamma_2^{1,k-2}(\mu; 1, \dots \gamma_2^{1,2}(\mu; 1, \mu) \dots)) \in \mathcal{O}(k)$. □

Следствие 6.3. *При $n \geq 2$ всякий элемент $\mu \in \mathcal{E}_n(2)$ задаёт на всякой $\mathcal{E}_n$-алгебре структуру гомотопически коммутативного и гомотопически ассоциативного моноида.* □

Как видно, компоненты связности очень важны. Изучим морфизм операд $\mathcal{O} \to \pi_0(\mathcal{O})$. Для краткости будем писать $\mathtt{M} := \mathtt{TopMon}$ и $\mathtt{C} := \mathtt{TopCommMon}$, то есть $\mathtt{M}(k) = \mathfrak{S}_k$, $\mathtt{C}(k) = *$.

(1) При $n = 1$ имеем

$$\mathcal{E}_1 \to \pi_0(\mathcal{E}_1) \cong \mathtt{M}.$$

Поэтому всякий топологический моноид является $\mathcal{E}_1$-алгеброй.

(2) Более того, $\mathcal{E}_1 \to \mathtt{M}$ — *локальная $\mathfrak{S}$-эквивалентность* операд: при всех $k \geq 0$ эквивариантное отображение $\mathcal{E}_1(k) \to \mathfrak{S}_k$ — $\mathfrak{S}_k$-эквивариантная ГЭ.

(3) При $n \geq 2$ имеем морфизм операд
$$\mathcal{E}_n \to \pi_0(\mathcal{E}_n) \cong \mathtt{C}.$$
Поэтому всякий коммутативный топологичекий моноид является $\mathcal{E}_n$-алгеброй.

(4) $\mathcal{E}_\infty$ — $\mathfrak{S}$-*свободная операда* (т.е. $\mathcal{E}_\infty(k) \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$ — свободные действия), и морфизм $\mathcal{E}_\infty \to \mathtt{C}$ является *локальной эквивалентностью* операд: $\mathcal{E}_\infty(k) \cong E\mathfrak{S}_k \xrightarrow{\sim} * \cong \mathtt{C}(k)$ — (неэквивариантные!) гомотопические эквивалентности.

Замечание 6.4. Эквивариантности быть не может: вообще, не существует $\mathfrak{S}_k$-эквивариантных отображений $* \to E\mathfrak{S}_k$ (справа все орбиты свободные, а слева тривиальные).

6.3. **Операды и гомотопические эквивалентности.** Вот формализация, см. [May72].

Определение 6.5. Топологическая операда $\mathcal{O}$ — *операда над* дискретной операдой $\mathtt{D}$, если выбран изоморфизм операд $\pi_0(\mathcal{O}) \cong \mathtt{D}$.

Возникает морфизм операд $\varepsilon : \mathcal{O} \to \mathtt{D}$, поэтому всякая $\mathtt{D}$-алгебра является $\mathcal{O}$-алгеброй. Поэтому если $\mathcal{O}$ — операда над $\mathtt{M}$ (над $\mathtt{C}$), то всякий (коммутативный) топологический моноид является $\mathcal{O}$-алгеброй.

Определение 6.6. (1) $\mathcal{O}$ — $\mathfrak{S}$-*свободная* операда, если $\mathcal{O}(k) \curvearrowleft \mathfrak{S}_k$ свободно при всех k.

(2) Морфизм операд $f : \mathcal{P} \to \mathcal{O}$ — *локальная эквивалентность*, если все отображения $\mathcal{P}(k) \to \mathcal{O}(k)$ — гомотопические эквивалентности;

(3) $f : \mathcal{P} \to \mathcal{O}$ — *локальная* $\mathfrak{S}$-*эквивалентность*, если $\mathcal{P}(k) \to \mathcal{O}(k)$ — $\mathfrak{S}_k$-эквивариантные гомотопические эквивалентности[22].

Теорема 6.7. (1) *Пусть $\mathcal{P} \to \mathcal{O}$ — локальная $\mathfrak{S}$-эквивалентность операд. Тогда $T_\mathcal{P}(X) \to T_\mathcal{O}(X)$ — ГЭ.*

(2) *Пусть $\mathcal{P} \to \mathcal{O}$ — локальная эквивалентность $\mathfrak{S}$-свободных операд над* $\mathtt{M}$ *или* $\mathtt{C}$. *Тогда $T_\mathcal{P}(X) \to T_\mathcal{O}(X)$ — ГЭ, если X связно.*

Доказательство. (1) Гомотопии эквивариантные, поэтому спускаются на факторпространства.

(2) Сначала заметим, что $\mathtt{M}(1) \cong \mathrm{pt} \cong \mathtt{C}(1)$, поэтому $\mathcal{O}(1)$ линейно связно. По предложению 6.2, $T_\mathcal{O}(X)$ — H-пространство. Более того, из явного описания
$$T_\mathcal{O}(X) := \Big(\coprod_{k\geq 0} \mathcal{O}(k) \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\times k} \Big) / \sim$$
следует, что $T_\mathcal{O}(X)$ линейно связно (упражнение). Теперь рассмотрим *фильтрацию Снэйта* $F_jT_\mathcal{O}(X) := \Big(\coprod_{k=0}^{j} \mathcal{O}(k) \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\times k} \Big) / \sim$. Её ассоциированные факторы имеют вид
$$F_jT_\mathcal{O}(X)/F_{j-1}T_\mathcal{O}(X) \cong \Big(\mathcal{O}(j) \times_{\mathfrak{S}_j} X^{\times j} \Big)/\ldots \cong \Big(\frac{\mathcal{O}(j) \times X^{\wedge j}}{\mathcal{O}(j) \times \mathrm{pt}} \Big) / \mathfrak{S}_j \cong \mathcal{O}(j)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_j} X^{\wedge j} =: e[\mathcal{O}(j), \mathfrak{S}_j, X].$$
Получаем морфизм корасслоений
$$\begin{array}{ccccc} F_{j-1}T_\mathcal{P}(X) & \longrightarrow & F_jT_\mathcal{P}(X) & \longrightarrow & e[\mathcal{P}(j), \mathfrak{S}_j, X] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F_{j-1}T_\mathcal{O}(X) & \longrightarrow & F_jT_\mathcal{O}(X) & \longrightarrow & e[\mathcal{O}(j), \mathfrak{S}_j, X]. \end{array}$$
Нам достаточно доказать, что $H_*(e[\mathcal{P}(j), \mathfrak{S}_j, X]; \mathbb{Z}) \to H_*(e[\mathcal{O}(j), \mathfrak{S}_j, X]; \mathbb{Z})$ — изоморфизм для всех j. Действительно: из этого следует, что

- $H_*(F_jT_\mathcal{P}(X)) \to H_*(F_jT_\mathcal{O}(X))$ — изоморфизм при всех j (по 5-лемме);
- $H_*(T_\mathcal{P}(X)) \to H_*(T_\mathcal{O}(X))$ — изоморфизм (т.к. фильтрация исчерпывающая: всякий компакт $K \subset T_\mathcal{O}(X)$ задевает только конечное число компонент связности, поэтому лежит в некотором $F_jT_\mathcal{O}(X)$)
- $T_\mathcal{P}(X) \to T_\mathcal{O}(X)$ — ГЭ (т.к. это морфизм связных H-пространств, индуцирующий изоморфизм на гомологиях).

[22]То есть, существует эквивариантное отображение в другую сторону и эквивариантные гомотопии.

Действие $\mathcal{P}(j) \curvearrowleft \mathfrak{S}_j$ свободно, поэтому имеем "накрытие пар" $\mathfrak{S}_j \to (\mathcal{P}(j)\times X^{\wedge j})/(\mathcal{P}(j)\times \mathrm{pt}) \to e[\mathcal{P}(j),\mathfrak{S}_j,X]$ и спектральную последовательность Картана–Лере[23]

$$E^2 = \mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_j;\mathcal{H}_*(\mathcal{P}(j)\times X^{\wedge j},\mathcal{P}(j);\mathbb{Z})) \Rightarrow H_*(e[\mathcal{P}(j),\mathfrak{S}_j,X];\mathbb{Z}).$$

Морфизм $\mathcal{P}\to\mathcal{O}$ индуцирует изоморфизм на E_2, поэтому изоморфизм на целях. □

Определение 6.8.
A_∞-операда — это любая $\mathfrak{S}$-свободная операда $\mathcal{A}$ такая, что есть локальная $\mathfrak{S}$-эквивалентность $\varepsilon:\mathcal{A}\to\mathtt{M}$ (то есть, если $\mathcal{A}(k)\simeq_{\mathfrak{S}_k}\mathfrak{S}_k$).
E_∞-операда — это любая $\mathfrak{S}$-свободная операда $\mathcal{P}$ такая, что есть локальная эквивалентность $\varepsilon:\mathcal{P}\to\mathtt{C}$. (то есть, если $\mathcal{P}(k)\simeq E\mathfrak{S}_k$.)

Например, $\mathtt{M}$ и $\mathcal{E}_1$ — A_∞-операды, а $\mathcal{E}_\infty$ — E_∞-операда. ($\mathtt{C}$ — не E_∞-операда, так как она не $\mathfrak{S}$-свободна!)

Если $\mathcal{O}$ — операда над $\mathtt{D}$, $\mathcal{O}'$ — операда над $\mathtt{D}'$, то $\mathcal{O}\times\mathcal{O}'$, $(\mathcal{O}\times\mathcal{O}')(k):=\mathcal{O}(k)\times\mathcal{O}'(k)$ — операда над $\mathtt{D}\times\mathtt{D}'$; в частности, произведение операд над $\mathtt{C}$ — операда над $\mathtt{C}$.

Определение 6.9. Пусть $\mathcal{O},\mathcal{O}'$ — операды над $\mathtt{M}$. Введём операду $\mathcal{O}\nabla\mathcal{O}':=\mathcal{O}\times_{\mathtt{M}}\mathcal{O}'$; более явно,

$$\mathcal{O}\nabla\mathcal{O}'(k):=\{(x,y)\in\mathcal{O}(k)\times\mathcal{O}'(k):\ \varepsilon(x)=\varepsilon'(y)\}.$$

(Если $\mathcal{O}(k)=\bigsqcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathcal{O}(k,\sigma)$, то $\mathcal{O}\nabla\mathcal{O}'(k)=\bigsqcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathcal{O}(k,\sigma)\times\mathcal{O}'(k,\sigma)$.)

Из определений сразу же получаем:

Предложение 6.10. (1) *Пусть $\mathcal{A}$ — A_∞-операда, $\mathcal{O}$ — операда над $\mathtt{M}$. Тогда Тогда $\mathcal{A}\nabla\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ — $\mathfrak{S}$-локальная эквивалентность.*
(2) *Пусть $\mathcal{P}$ — E_∞-операда, $\mathcal{O}$ — $\mathfrak{S}$-свободная операда. Тогда $\mathcal{P}\times\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ — локальная эквивалентность.*
(3) *Пусть $\mathcal{P}$ — E_∞-операда. Тогда $\mathcal{P}\times\mathtt{M}\to\mathtt{M}$ — $\mathfrak{S}$-локальная эквивалентность. В частности, $\mathcal{P}\times\mathtt{M}$ — A_∞-операда.* □

Теперь вспомним теорему Милгрэма–Мэя: если X связно, то для любого $1\le n\le\infty$ морфизм операд $\sigma:\mathcal{E}_n\Rightarrow\Omega^n\Sigma^n$ задаёт слабую ГЭ $\sigma_*:T_{\mathcal{E}_n}(X)\xrightarrow{\sim}\Omega^n\Sigma^nX$.

Следствие 6.11. *$\Omega T_{\mathcal{E}_{n-1}}(\Sigma X)\xrightarrow{\sim}\Omega^n\Sigma^nX$ для любого X и любого $2\le n\le\infty$.* □

Следствие 6.12. *Пусть $\mathcal{A}$ — любая A_∞-операда, и X связно. Тогда*

$$J(X)=T_{\mathtt{M}}(X)\xleftarrow{\sim}T_{\mathcal{A}}(X)\xleftarrow{\sim}T_{\mathcal{A}\nabla\mathcal{E}_1}(X)\xrightarrow{\sim}T_{\mathcal{E}_1}(X)\xrightarrow{\sim}\Omega\Sigma X.$$

Доказательство. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}_1$ — A_∞-операды, поэтому $\mathtt{M}\leftarrow\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{A}\nabla\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_1$ — $\mathfrak{S}$-локальные эквивалентности по предложению 6.10. Дальше применяем теорему 6.7.

Последняя стрелка — это теорема Милгрэма–Мэя. □

Следствие 6.13. *Пусть $\mathcal{P}$ — E_∞-операда, и X связно. Тогда*

$$T_{\mathcal{P}}(X)\xleftarrow{\sim}T_{\mathcal{P}\times\mathcal{E}_\infty}(X)\xrightarrow{\sim}T_{\mathcal{E}_\infty}(X)\xrightarrow{\sim}\Omega^\infty\Sigma^\infty X,\quad T_{\mathcal{P}\times\mathcal{E}_n}(X)\xrightarrow{\sim}T_{\mathcal{E}_n}(X)\xrightarrow{\sim}\Omega^n\Sigma^nX.$$

Доказательство. $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}_\infty$ — E_∞-операды, поэтому $\mathcal{P}\leftarrow\mathcal{P}\times\mathcal{E}_\infty\to\mathcal{E}_\infty$ — локальные эквивалентности. Дальше применяем теорему 6.7. Последняя стрелка — это теорема Милгрэма–Мэя. □

Следствие 6.14. *Пусть $\mathcal{P}$ — E_∞-операда, и X любое. Тогда*

$$\Omega T_{\mathcal{P}}(\Sigma X)\xleftarrow{\sim}\Omega T_{\mathcal{P}\times\mathcal{E}_\infty}(\Sigma X)\xrightarrow{\sim}\Omega T_{\mathcal{E}_\infty}(\Sigma X)\xrightarrow{\sim}\Omega^\infty\Sigma^\infty X.\quad\square$$

6.4. **Бесконечнократные пространства петель.** Мы вводили морфизм монад $\sigma:T_{\mathcal{E}_n}\Rightarrow\Omega^n\Sigma^n$, где монада $\Omega^n\Sigma^n$ в $\mathcal{T}op_*$ происходит из пары сопряжённых функторов

$$\Sigma^n:\mathcal{T}op_*\rightleftarrows\mathcal{T}op_*:\Omega^n.$$

Этих функторов нет при $n=\infty$. Вот как это исправить.

Определение 6.15. При $1\le n\le\infty$ обозначим через $\mathcal{L}oops_n$ категорию наборов $\underline{Y}=(Y_0,\dots,Y_n)$, $Y_i\in\mathcal{T}op_*$ таких, что $Y_i\cong\Omega Y_{i+1}$.

Про $\underline{Y}$ надо думать как про "структуру n-кратного пространства петель на топологическом пространстве Y_0".

[23] $E^2_{p,q}=\mathrm{H}_p(G;\mathcal{H}_q(\widetilde{X};\mathbf{k})):=H_p(BG;\mathcal{H}_q(\widetilde{X};\mathbf{k}))\Rightarrow H_{p+q}(X;\mathbf{k})$ для регулярного накрытия $G\to\widetilde{X}\to X$.

Замечание 6.16. Если $n < \infty$, то отображение $\underline{Y} \mapsto Y_n$ задаёт эквивалентность категорий $\mathcal{L}oops_n \simeq \mathcal{T}op_*$. При $n = \infty$ это уже не так, и $\mathcal{L}oops_\infty$ — это "наивная категория Ω-предспектров".

Введём функторы $Q_n : \mathcal{T}op_* \rightleftarrows \mathcal{L}oops_n : U_n$,

$$Q_n(X) := (\Omega^n\Sigma^n X, \Omega^{n-1}\Sigma^n X, \dots, \Sigma^n X), \quad U_n(\underline{Y}) := Y_0.$$

Заметим, что единица сопряжения $E_Y : Y \to \Omega\Sigma Y$ задаёт отображения

$$\Omega^n E_{\Sigma^{n+k}X} : \Omega^n\Sigma^{n+k}X = \Omega^n(\Sigma^{n+k}X) \to \Omega^n(\Omega\Sigma(\Sigma^{n+k}X)) = \Omega^{n+1}\Sigma^{n+k+1}X,$$

согласованные между собой. Поэтому при $n = \infty$ корректно определён функтор

$$Q_\infty : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{L}oops_\infty, \quad Q_\infty(X) := (\operatorname{colim}_n \Omega^n\Sigma^n X, \operatorname{colim}_n \Omega^n\Sigma^{n+1}X, \dots).$$

Лемма 6.17. *Пусть* $1 \le n \le \infty$.

(1) $Q_n : \mathcal{T}op_* \rightleftarrows \mathcal{L}oops_n : U_n$ *— пара сопряжённых функторов.*
(2) *Соответствующая монада* $U_n \circ Q_n$ *в* $\mathcal{T}op_*$ *изоморфна эндофунктору* $\Omega^n\Sigma^n$ *(при* $n = \infty$ *— эндофунктору* $Q(X) := \operatorname{colim}_n \Omega^n\Sigma^n X$*).*
(3) $Q_n(X) := \Omega^n\Sigma^n X \in \mathcal{L}oops_n$ *—свободное* n*-кратное пространство петель, соответствующее пространству* $X \in \mathcal{T}op_*$.
(4) *Отображение* $\underline{Y} \mapsto Y_0$ *задаёт функтор* $\widehat{U}_n : \mathcal{L}oops_n \to \Omega^n\Sigma^n[\mathcal{T}op_*]$. □

6.5. **Операда Барратта–Экклза.** По определению, $\mathbb{E}_n$-алгебра — это цепной комплекс вместе с действием dg-операды $C_*(\mathcal{E}_n; \mathbf{k})$. Это слишком большая операда для того, чтобы с ней работать явно. Оказывается, есть явная маленькая комбинаторная модель.

Определение 6.18 (Berger, Fresse [BF02] в честь [BE74])**.** *Операда Барратта–Экклза* $\mathcal{BE}$ — это нормализованная бар-резольвента для операды $\mathtt{Ass} = \mathbf{k}[\mathtt{Mon}]$, то есть следующая операда в $\mathcal{C}h(\mathbf{k})$: подлежащие цепные комплексы

$$\mathcal{BE}(k) := \overline{\mathrm{B}}(\mathbf{k}[\mathfrak{S}_k], \mathbf{k}[\mathfrak{S}_k], \mathbf{k})$$

имеют вид

$$\mathcal{BE}(k)_m = \frac{\operatorname{span}_{\mathbf{k}}([\omega_0|\dots|\omega_m] :\ \omega_i \in \mathfrak{S}_k)}{[\omega_0|\dots|\omega_m] = 0,\ \exists i :\ \omega_i = \omega_{i+1}},$$

$$d([\omega_0|\dots|\omega_m]) := \sum_{i=0}^m (-1)^i [\omega_0|\dots|\widehat{\omega_i}|\dots|\omega_m],$$

а структура операды индуцирована структурой операды на $\mathtt{Mon}$, то есть подстановками

$$\gamma_k^{\ell_1,\dots,\ell_k} : \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\ell_k} \to \mathfrak{S}_{\ell_1+\dots+\ell_k}.$$

Несложно проверить, что $\mathcal{BE}$ — это E_∞-операда в $\mathcal{C}h(\mathbf{k})$. Аугментация $\mathcal{BE} \xrightarrow{\sim} \mathtt{Com}$ такая:

$$[\omega] \mapsto 1, \quad [\omega_0|\dots|\omega_d] \mapsto 0,\ d \ge 1.$$

Факт: существует явная фильтрация $F_1\mathcal{BE} \subset F_2\mathcal{BE} \subset \dots \subset \mathcal{BE}$ (в терминах числа беспорядков в перестановках) такая, что $F_n\mathcal{BE}$ и $\mathbb{E}_n$ квази-изоморфны как операды. Поэтому для $\mathbb{E}_n$-алгебр есть явная комбинаторная модель: $F_n\mathcal{BE}$-алгебры.

6.6. **Компактификации конф. пространств.** Этот сюжет пригодится, когда мы будем интегрировать. Интегрировать удобно по компактам; но и $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$, и $\mathcal{E}_n(k)$ — некомпактные многообразия.

Первую конструкцию, которая компактифицирует $\mathrm{Conf}_k(M)$ для гладких проективных многообразий, предложили Фултон и Макферсон. Их конструкция хороша тем, что получается *дополнение до дивизора с нормальными пересечениями*: у них

- $\mathrm{Conf}_k(M) \subset V$ — открытое подмножество проективного многообразия;
- $V \setminus \mathrm{Conf}_k(M) = D_1 \cup \dots \cup D_N$ — объединение гладких дивизоров;
- все пересечения этих дивизоров трансверсальны.

Она основана на понятии раздутия. Напоминание: для гладкого комплексного подмногообразия $i : Y \hookrightarrow X$ коразмерности k пусть $Bl_{ag}(X, Y)$ — алгебро-геометрическое *раздутие* X вдоль Y. Неформально говоря, вместо каждой точки $y \in Y$ мы вклеиваем копию $\mathbb{C}P^{k-1}$ "в нормальном направлении": морфизм $Bl_Y(X) \to X$ — изоморфизм над $X \setminus Y$, и совпадает с $\mathbb{P}(\nu) \to Y$ над Y.

Явная конструкция такая: пусть $Y = \{f_1 = \cdots = f_r = 0\} \subset X$; тогда определено отображение

$$\alpha : X \setminus Y \to X \times \mathbb{P}^{r-1}, \quad \alpha(x) := (x, [f_1(x) : \cdots : f_r(x)]),$$

и $Bl_{ag}(X, Y) = \overline{\mathrm{Im}(\alpha)}$.

Так вот, для каждого $S \subset \{1, \ldots, k\}$ мы можем рассмотреть подмногообразие

$$\Delta_S := \{x_i = x_j,\ i, j \in S\} \subset M^{\times k};$$

возникает диагональное вложение

$$\mathrm{Conf}_k(M) \hookrightarrow M^{\times k} \times \prod_{S \subset \{1,\ldots,k\}, |S| \geq 2} Bl_{ag}(M^{\times k}, \Delta_S),$$

и компактификация Фултона–Макферсона — это замыкание образа. К сожалению, эта компактификация меняет гомотопический тип (задача: увидеть это для $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R})$).

Аксельрод и Зингер показали: если вместо проективных пространств брать сферы (рассматривать “сферическое раздутие”), то гомотопический тип не меняется. Более того, (в хороших случаях) их компактификация гомеоморфна пространству $\{\vec{x} \in M^{\times k} \mid \rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon,\ \forall i \neq j\}$. Например, компактификация Аксельрода–Зингера для $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R})$, то есть для объединения открытых полупространств, — это несвязное объединение двух замкнутых полупространств.

Мы рассмотрим более конкретную конструкцию, которую предложил Синха [Sin04, Sin05]. Идея простая: сделать всё для $\mathbb{R}^n$, а произвольное (гладкое) многообразие вложить в $\mathbb{R}^n$.

Определение 6.19 (Dev Sinha)**.** Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — подмногообразие. Обозначим

$$\iota : \mathrm{Conf}_k(M) \to M^{\times k}, \quad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, x_k),$$

$$\pi_{ij} : \mathrm{Conf}_k(M) \to S^{n-1}, \quad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \frac{x_i - x_j}{||x_i - x_j||},\ i \neq j,$$

$$s_{ij\ell} : \mathrm{Conf}_k(M) \to (0, +\infty) \subset [0, +\infty], \quad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \frac{||x_i - x_j||}{||x_i - x_\ell||}, \quad i \neq j \neq \ell \neq i.$$

(1) Рассмотрим вложение

$$\alpha_k := \iota \times \prod_{i,j} \pi_{ij} \times \prod_{i,j,\ell} s_{ij\ell} :\ \mathrm{Conf}_k(M) \to M^{\times k} \times (S^{n-1})^{\times \binom{k}{2}} \times [0, +\infty]^{\times \binom{k}{3}}.$$

Пространство $\mathrm{Conf}_k[M] := \overline{\mathrm{Im}(\alpha_k)}$ — это *компактификация Аксельрода–Зингера*, или *каноническое пополнение* для $\mathrm{Conf}_k(M)$.

(2) Рассмотрим вложение

$$\beta_k := \iota \times \prod_{i,j} \pi_{ij} : \mathrm{Conf}_k(M) \to M^{\times k} \times (S^{n-1})^{\times \binom{k}{2}}.$$

Пространство $\mathrm{Conf}_k\langle[M]\rangle := \overline{\mathrm{Im}(\beta_k)}$ — это *симплициальное пополнение* для $\mathrm{Conf}_k(M)$.

(3) Пусть $G_n := \mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ действует на $\mathbb{R}^n$ сдвигами и растяжениями. Введём пространство $\widetilde{\mathrm{Conf}}_k(\mathbb{R}^n) := \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)/G_n \simeq \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ и аналогичные компактификации

$$\widetilde{\mathrm{Conf}}_k[\mathbb{R}^n] =: \mathtt{FM}_n(k), \quad \widetilde{\mathrm{Conf}}_k\langle[\mathbb{R}^n]\rangle =: \mathcal{K}_n(k).$$

Эти пространства образуют *операду Фултона–Макферсона* $\mathtt{FM}_n$ и *операду Концевича* $\mathcal{K}_n$.

Теорема 6.20. (1) $\mathrm{Conf}_k[M] \supset \mathrm{Conf}_k(M) \subset \mathrm{Conf}_k\langle[M]\rangle$ *— гомотопические эквивалентности и открытые вложения. Это компактификации, если M — компактное многообразие. Конструкция не зависит от вложения, и функториальна (для вложенных многообразий). То же верно для компактификаций* $\widetilde{\mathrm{Conf}}_k(\mathbb{R}^n)$.

(2) *Естественные отображения* $\mathtt{FM}_n(k) \leftarrow \mathcal{E}_n(k) \to \mathcal{K}_n(k)$ *— гомотопические эквивалентности и “с точностью до гомотопии, морфизмы операд”. (На самом деле, существуют зигзаги из гомотопических эквивалентностей операд.)*

6.7. **Геометрия компактификаций (TODO).** [Здесь будет пару слов о стратификации $\mathrm{Conf}_k[M]$, соответствующей корневым деревьям, и о структуре операды на $\mathtt{FM}_n$. Пока что см. детали в [Sin04, Sin05].]

7. Эквивариантная топология и комбинаторика (23 марта)

Разовьём методы, которые позволяют доказать (следуя [BLZ12]):

Предложение 7.1 (Spicy chicken theorem)**.** *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело*[24], *p — простое число. Тогда K можно разрезать на p выпуклых частей, имеющих одинаковые объёмы и одинаковые площади поверхности. (Более того, можно считать, что все разрезы — это куски гиперплоскостей.)* □

7.1. **Напоминание.** Мы изучаем действия конечных групп на топологических пространствах. Если $G \curvearrowright X$ — такое действие, то естественно возникает конструкция Бореля $EG \times_G X$ и эквивариантные когомологии

$$H^*_G(X; \mathbf{k}) := H^*(EG \times_G X; \mathbf{k}).$$

С.п. Серра для расслоения $EG \times X \to EG \times_G X \to BG$ — это *спектральная последовательность Бореля*

$$E_2^{i,j} = H^i(BG; \mathcal{H}^j(X; \mathbf{k})) \cong \mathrm{H}^i(G; \mathcal{H}^j(X; \mathbf{k})) \Rightarrow H^{i+j}_G(X; \mathbf{k}).$$

В наших приложениях $G = \mathbb{Z}/p$ или $\mathfrak{S}_p$. Полезно помнить:

- $H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[u]$, $|u| = 1$;
- $H^*(B\mathbb{Z}/p; \mathbb{F}_p) \cong \Lambda[e] \otimes \mathbb{F}_p[t]$, $|e| = 1$, $|t| = 2$, $t = \beta(e)$.

В частности, $\dim H^i(B\mathbb{Z}/p; \mathbb{F}_p) = 1 \neq 0$ для всех $i \geq 0$.

7.2. **Индекс Фаделла–Хусейни.** Пусть $G \curvearrowright Y$ — действие топологической группы. Возникает эквивариантное отображение $Y \to \mathrm{pt}$; у него есть сечение тогда и только тогда, когда $Y^G \neq \varnothing$.

Определение 7.2. Рассмотрим индуцированное отображение $H^*_G(Y; \mathbf{k}) \leftarrow H^*_G(\mathrm{pt}; \mathbf{k})$. Его ядро называется *индексом Фаделла–Хусейни*:

$$\mathrm{Index}_G(Y; \mathbf{k}) := \mathrm{Ker}(H^*_G(\mathrm{pt}; \mathbf{k}) \to H^*_G(Y; \mathbf{k})) = \mathrm{Ker}(H^*(BG; \mathbf{k}) \to H^*(EG \times_G Y; \mathbf{k})).$$

Это однородный идеал в $H^*(BG; \mathbf{k})$; в частности, градуированный $\mathbf{k}$-модуль.

Вот несколько свойств.

Предложение 7.3.
- *Если $Y^G \neq \varnothing$, то* $\mathrm{Index}_G(Y; \mathbf{k}) = 0$.
- *(“монотонность”) Если существует эквивариантное отображение $f : X \to Y$, то* $\mathrm{Index}_G(X; \mathbf{k}) \supseteq \mathrm{Index}_G(Y; \mathbf{k})$. *В частности,* $\dim(\mathrm{Index}_G(X; \mathbf{k})^i) \geq \dim(\mathrm{Index}_G(Y; \mathbf{k})^i)$, $\forall i \geq 0$.
- *Если действие $G \curvearrowright Y$ свободно и* $\dim Y/G \leq n$, *то* $\mathrm{Index}_G(Y; \mathbf{k})^{>n} = H^{>n}(BG; \mathbf{k})$.
- *Если X (гомологически) n-связно, то* $\mathrm{Index}_G(X; \mathbf{k})^{\leq(n+1)} = 0$.

Доказательство.
1. Всякая точка $y_0 \in Y^G$ задаёт эквивариантное сечение $\mathrm{pt} \to Y^G \to \mathrm{pt}$. Если оно существует, то $H^*_G(\mathrm{pt}; \mathbf{k}) \to H^*_G(Y; \mathbf{k})$ инъективно.
2. Так как $X \to Y \to \mathrm{pt}$, отображение $H^*_G(\mathrm{pt}; \mathbf{k}) \to H^*_G(X; \mathbf{k})$ пропускается через $H^*_G(Y; \mathbf{k})$.
3. $H^*_G(Y; \mathbf{k}) \cong H^*(Y/G; \mathbf{k}) = 0$ при $* > n$.
4. Запишем спектральную последовательность Бореля:
$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(G; \mathcal{H}^j(X; \mathbf{k})) \Rightarrow H^{i+j}_G(X; \mathbf{k}).$$
По условию, $H^j(X; \mathbf{k}) = 0$ при $1 \leq j \leq n$, поэтому $E_2^{*,j} = 0$ при $1 \leq j \leq n$. Значит, краевой гомоморфизм $H^i(BG; \mathbf{k}) \cong \mathrm{H}^i(G; \mathcal{H}^0(X; \mathbf{k})) \to H^i_G(X; \mathbf{k})$ — изо при $i \leq n$ и моно при $i = n+1$. □

Отсюда сразу же следует

Теорема 7.4 (Теорема Дольда)**.** *Пусть $1 < |G| < \infty$, $G \curvearrowright X$, $G \curvearrowright Y$, где*
- *X n-связно;*
- *Y n-мерно;*
- *$G \curvearrowright Y$ свободно.*

Тогда не существует эквивариантного отображения $X \to Y$.

Доказательство. Сразу можно считать, что $G = \mathbb{Z}/p$. По предложению 7.3,
- $\mathrm{Index}_G(X; \mathbf{k}) \supseteq \mathrm{Index}_G(Y; \mathbf{k})$;

[24] Компакт с непустой внутренностью

- $\mathrm{Index}_G(X;\mathbf{k})^{\le(n+1)}=0$;
- $\mathrm{Index}_G(Y;\mathbf{k})^{>n}=H^{>n}(BG;\mathbf{k})$.

В частности, $H^{n+1}(BG;\mathbf{k})=0$. Но $H^{n+1}(B\mathbb{Z}/p;\mathbb{F}_p)=\mathbb{F}_p\neq 0$, противоречие. □

Замечание 7.5. Достаточно требовать гомологической связности, т.е. чтобы $\widetilde{H}_{\le n}(X;\mathbb{F}_p)=0$.

Сегодня мы будем применять следующий результат.

Предложение 7.6. (1) $\mathrm{Index}_{\mathfrak{S}_p}(\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n);\mathbb{F}_p)=\mathrm{H}^{>(n-1)(p-1)}(\mathfrak{S}_p;\mathbb{F}_p)$.
(2) $\mathrm{Index}_{\mathbb{Z}/p}(\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n);\mathbb{F}_p)=\mathrm{H}^{>(n-1)(p-1)}(\mathbb{Z}/p;\mathbb{F}_p)$.

Доказательство. Это вычисление Фреда Коэна (следует из теоремы 7.17). □

Замечание 7.7. Если Y связно, то $\mathrm{Index}_G(Y;\mathbf{k})$ — это ядро естественного отображения $H^*(BG;\mathbf{k})=E_2^{0,*}\twoheadrightarrow E_\infty^{0,*}\hookrightarrow H^*_G(X;\mathbf{k})$ из спектральной последовательности, то есть пересечение ядер всех дифференциалов, попадающих в $E_*^{*,0}$. Например, получаем: если $E_2=E_\infty$, то $\mathrm{Index}_G(Y;\mathbf{k})=0$.

7.3. **Приложения в топологической комбинаторике.** Вот игрушечный пример.

Предложение 7.8. *Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана метрика d такая, что индуцированная топология совпадает со стандартной. Тогда найдутся три равноудалённые точки.*

Доказательство. Сопоставим тройке точек $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}^2$, не все из которых совпадают, тройку попарных расстояний между ними. Это $\mathfrak{S}_3$-эквивариантное "тестовое отображение"

$$f_0: X\to\mathbb{R}^3,\quad (x_1,x_2,x_3)\mapsto(d(x_2,x_3),d(x_1,x_3),d(x_1,x_2)),$$

где

$$X=(\mathbb{R}^2)^{\times 3}\setminus\Delta(\mathbb{R}^2)\cong\mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^4\setminus\{0\})\simeq S^3.$$

Пусть наша задача неразрешима, т.е. равносторонних треугольников нет. Эквивалентно, образ отображения f_0 не пересекается с диагональю $\Delta(\mathbb{R})=\{(x,x,x):x\in\mathbb{R}\}$. Получаем $\mathfrak{S}_3$-эквивариантное отображение

$$f: X\to Y=\mathbb{R}^3\setminus\Delta(\mathbb{R}).$$

Докажем, что даже $\mathbb{Z}/3$-эквивариантного отображения не существует. Действительно: возьмём композицию с $\mathbb{Z}/3$-эквивариантной проекцией $Y\to S^1$ на единичную окружность в $\Delta(\mathbb{R})^\perp\subset\mathbb{R}^3$.

- $X\simeq S^3$ односвязно;
- S^1 одномерно;
- $\mathbb{Z}/3\curvearrowright S^1$ свободно.

По теореме Дольда, эквивариантное отображение $X\to S^1$ не может существовать. □

Резюме: мы рассмотрели пространство возможных конфигураций X и "тестовое отображение" $f:X\to V$. Хотим доказать, что хотя бы одна конфигурация хорошая, то есть что $f(X)\cap W\neq\varnothing$, где $W\subset V$ — "множество хороших значений". Рассуждаем от противного: иначе возникает эквивариантное[25] отображение $f:X\to V\setminus W$, а такого быть не может из топологических соображений. Этот метод доказательств называется CS/TM ("configuration space / test map").

Ещё одно приложение: теорема Коэна–Ласка. Пусть $G\curvearrowright X$, и $f:X\to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим подпространство "схлопывающихся орбит"

$$A(X,f):=\{x\in X\mid \exists g\neq h:\ f(gx)=f(hx)\}=\{x\in X:\ f|_{Gx}\text{ не инъективно}\}.$$

Теорема 7.9 ([CL75])**.** *Пусть $\mathbb{Z}/p\curvearrowright X$, где X связно и $\widetilde{H}_{\le(n-1)(p-1)}(X;\mathbb{F}_p)=0$ для некоторого $n\ge 2$. Тогда*

1. *Любое непрерывное отображение $f:X\to\mathbb{R}^n$ склеивает две точки из одной орбиты, т.е. $A(X,f)\neq\varnothing$. (В частности, X нельзя вложить в $\mathbb{R}^n$.)*
2. *Если X — ориентированное многообразие, то вдобавок* $\dim A(X,f)\ge\dim X-(n-1)(p-1)$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}/p=\langle T\rangle$. Всякое непрерывное отображение $f:X\to Y$ задаёт $\mathbb{Z}/p$-эквивариантное отображение

$$\widehat{f}:X\to Y^{\times p},\quad \widehat{f}(x):=(f(x),f(Tx),\dots,f(T^{p-1}x)).$$

Оно ограничивается до $\widehat{f}:X\setminus A(X,f)\to\mathrm{Conf}_p(Y)$.

[25]Относительно каких-то естественных симметрий, которые есть у $f:X\to V\supset W$.

(1) Пусть такое $f : X \to \mathbb{R}^n$ нашлось. Тогда $\widehat{f} : X \to \mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n)$ — $\mathbb{Z}/p$-эквивариантное. По предложению 7.6 имеем

$$\mathrm{Index}_{\mathbb{Z}/p}(X;\mathbb{F}_p) \supseteq \mathrm{Index}_{\mathbb{Z}/p}(\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n);\mathbb{F}_p) = \mathrm{H}^{>(p-1)(n-1)}(\mathbb{Z}/p;\mathbb{F}_p).$$

Но X гомологически $(n-1)(p-1)$-связно, поэтому $\mathrm{Index}_{\mathbb{Z}/p}(X;\mathbb{F}_p)^{\leq (n-1)(p-1)+1} = 0$.

(2) По пункту (1), $\widetilde{H}_j(X \setminus A(X,f);\mathbb{F}_p) \neq 0$ для некоторого $j \leq (n-1)(p-1)$. Но в этом диапазоне $\widetilde{H}_*(X;\mathbb{F}_p) = 0$, поэтому

$$\widetilde{H}_j(X \setminus A) \cong H_{j+1}(X, X \setminus A) \cong H^{\dim X - j}(X, A) \cong \widetilde{H}^{\dim X - j - 1}(A).$$

Значит, $\dim A \geq \dim X - j - 1$. □

7.4. **Теорема об острой курочке.** Предложение 7.1 следует из следующей теоремы.

Теорема 7.10 (Karasev / Hubard, Aronov, см. [KHA13])**.** *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело, и в $\mathbb{R}^n$ задано n абсолютно непрерывных вероятностных мер (т.е. заданы измеримые функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n d\mu = 1$).*

Тогда: если k — степень простого числа, то найдётся разбиение на выпуклые части $\mathbb{R}^n = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k$ такое, что

$$\int_{P_1 \cap K} \varphi_s d\mu = \dots = \int_{P_k \cap K} \varphi_s d\mu, \quad \forall s = 1, \dots, n.$$

Более того: при $2 \leq s \leq n$ вместо функционалов $X \mapsto \int_X \varphi_i d\mu$ разрешается также брать другие непрерывные (в метрике Хаусдорфа) функционалы от компактных выпуклых тел $X = P_i \cap K \subset \mathbb{R}^n$.

Замечание 7.11. При $n = 3$ помимо площади можно взять ещё один функционал, то есть реально добиться, чтобы у всех кусков курицы была ещё и одинаковая максимальная ширина (или средняя ширина). А именно, в качестве функционалов можно взять коэффициенты многочлена $P_X(t) := \mu(X + tD)$, где D — стандартный шар. Тогда из теоремы следует, что у кусков в разбиении равны все *меры Штейнера*.

Вот что на самом деле надо доказывать. Рассмотрим представление

$$\mathfrak{S}_k \curvearrowright W_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \sum x_i = 0\} \simeq \mathbb{R}^{k-1}.$$

Для представления $G \curvearrowright V$ определено действие $G \curvearrowright \mathbb{S}(V)$, поэтому $\mathfrak{S}_k \curvearrowright \mathbb{S}(W_k^{\oplus(n-1)})$.

Теорема 7.12 (Карасёв / Hubard, Aronov / Blagojević, Ziegler)**.** *Пусть $n \geq 2$. Следующие условия эквивалентны:*

- *k — степень простого числа;*
- *не существует $\mathfrak{S}_k$-эквивариантного отображения* $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{S}(W_k^{\oplus(n-1)})$. □

Мы умеем доказывать частный случай.

Следствие 7.13. *Если p простое и $n \geq 2$, то не существует $\mathbb{Z}/p$-эквивариантных отображений* $\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{S}(W_p^{\oplus(n-1)})$.

Доказательство. Это опять следует из монотонности для индекса Фаделла–Хусейни. У пространства слева индекс равен $\mathrm{H}^{>(n-1)(p-1)}(\mathbb{Z}/p;\mathbb{F}_p)$ по предложению 7.6, а у пространства справа он равен $\mathrm{H}^{\geq(n-1)(p-1)}(\mathbb{Z}/p;\mathbb{F}_p)$. (Действительно: это $((p-1)(n-1)-1)$-мерная сфера со свободным действием $\mathbb{Z}/p$. Её $H^*_{\mathbb{Z}/p}$ — это когомологии линзы, а $B\mathbb{Z}/p$ — бесконечномерная линза.) □

Идея доказательства теоремы 7.10. Сначала рассмотрим случай, когда мер не n, а $n-1$, т.е. когда мы игнорируем условие $\int_{P_1 \cap K} \varphi_1 d\mu = \dots = \int_{P_k \cap K} \varphi_1 d\mu$.

Каждой конфигурации различных точек $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ сопоставим *диаграмму Вороного* $\mathbb{R}^n = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k$,

$$P_i(\vec{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_i|| \leq ||x - x_j||, \ \forall j = 1, \dots, k\}$$

(множества меры нуль можно игнорировать). Возникают $\mathfrak{S}_k$-эквивариантные отображения

$$t_s : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^k, \quad \vec{x} \mapsto \Big(\int_{P_1(\vec{x}) \cap K} \varphi_s d\mu, \dots, \int_{P_k(\vec{x}) \cap K} \varphi_s d\mu\Big), \quad 2 \leq s \leq n$$

и диагональное $\mathfrak{S}_k$-эквивариантное отображение

$$t = (t_2, \ldots, t_n) : \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^k)^{\oplus(n-1)}.$$

Если у нашей задачи нет решения, то это отображение не задевает диагонально вложенное $\mathbb{R}^{n-1}$; таким образом, возникает $\mathfrak{S}_k$-эквивариантное отображение

$$\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^k \setminus \Delta(\mathbb{R}))^{\oplus(n-1)} \simeq \mathbb{S}(W_k^{\oplus(n-1)}),$$

а такого быть не может. (Заметим, что в этой ситуации решение достигается на некоторой диаграмме Вороного!)

Чтобы получить n мер, надо модифицировать разбиение вот так. Рассмотрим задачу оптимального транспорта: если $\varphi_1 d\mu$ — это размазанная по $\mathbb{R}^d$ единичная масса, то мы хотим перенести её в точки $x_1, \ldots, x_k$ так, чтобы в каждой точке оказалась масса $1/k$, и было затрачено как можно меньше усилий. Формально: хотим измеримое отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $T_*(\varphi_1 d\mu) = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}/k$, и минимизировать величину $\int_{\mathbb{R}^d} ||T(x) - x||^2 d\mu$.

По теореме Канторовича–Бренье–МакКанна, у этой задачи есть единственное решение, которое непрерывно зависит от набора $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$; более того, оно даётся обобщённой диаграммой Вороного — разбиением

$$P_i(\vec{x}) = \{x \in \mathbb{R}^d : \ ||x - x_i||^2 - r_i(\vec{x}) \le ||x - x_j||^2 - r_j(\vec{x}), \ \forall j = 1, \ldots, k\}$$

для некоторых $r_1(\vec{x}), \ldots, r_k(\vec{x}) > 0$ (зависяших от $x_1, \ldots, x_k$). Для такого разбиения автоматически выполнено условие, что $\int_{P_i \cap K} \varphi_1 d\mu$ равны. Дальше рассуждаем как раньше. □

7.5. **Эквивариантные когомологии** $\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n)$**.** Сразу рассмотрим скучный случай $p = 2$. Имеем $C_2(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$, поэтому

$$H^*_{\mathfrak{S}_2}(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}_2) = H^*_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}_2) \cong \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{F}_2)/\mathrm{H}^{>(n-1)}(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[u]/(u^n), \quad |u| = 1.$$

Далее $p > 2$, $n \ge 2$. Вычислим $\mathbb{F}_p$-когомологии группы $\mathfrak{S}_p$ через трансфер.

Предложение 7.14. *Пусть $N \triangleleft G$ — нормальная подгруппа конечной группы, содержащая её силовскую p-подгруппу. Тогда $H^*_G(X; \mathbb{F}_p) \cong H^*_N(X; \mathbb{F}_p)^{G/N}$.*
То же верно для когомологий с коэффициентами в любом $\mathbb{F}_p[G]$-модуле.

Доказательство. Это теорема о трансфере для накрытия $G/N \to EG \times_N X \to EG \times_G X$. □

Следствие 7.15. *Если M — $\mathbb{F}_p[G]$-модуль, то $\mathrm{H}^*(G; M) \cong \mathrm{H}^*(N; M)^{G/N}$.* □

В частности, $\mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{F}_p)^{\mathfrak{S}_p/(\mathbb{Z}/p)}$ можно посчитать. Ответ такой:

Следствие 7.16 ([May70, Lemma 1.4(i)])**.** *При $p > 2$ образ вложения $\mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{F}_p) \cong \Lambda_{\mathbb{F}_p}[e] \otimes \mathbb{F}_p[t]$ порождён элементами $v = t^{p-1}$ и $\beta v = -et^{p-1}$; таким образом,*

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p) \cong \Lambda_{\mathbb{F}_p}[v] \otimes \mathbb{F}_p[\beta v], \quad |v| = 2(p-1) - 1, \ |\beta v| = 2(p-1);$$

$$\dim \mathrm{H}^i(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p) = \begin{cases} 1, & i \equiv 0 \mod 2(p-1) \\ 1, & i \equiv -1 \mod 2(p-1) \\ 0 & \textit{иначе.} \quad \square \end{cases}$$

Вспомним: категорное произведение аугментированных алгебр — это аугментированная прямая сумма $A \widetilde{\oplus} B := (A \oplus B)/(1_A = 1_B)$.

Теорема 7.17 ([Coh76, 5.2,5.3,5.4])**.** *Пусть $p > 2$ простое, $n \ge 2$.*

(1)
$$H^*_{\mathfrak{S}_p}(\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}_p) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p)/\mathrm{H}^{>(n-1)(p-1)}(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p), & n \text{ нечётно;} \\ \Lambda[\alpha_{n-1}] \widetilde{\oplus} (\text{то же самое}), & n \text{ чётно.} \end{cases}$$

(2) *(когомологии, подкрученные на знаковое представление $\mathfrak{S}_p$)*
$$H^*_{\mathfrak{S}_p}(\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}_p(1)) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p(1))/\mathrm{H}^{>(n-1)(p-1)}(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p(1)), & n \text{ нечётно;} \\ \mathbb{F}_p\{\lambda_{(n-1)(p-1)/2}\} \oplus (\text{то же самое}), & n \text{ чётно.} \end{cases}$$

(3) $H^*_{\mathbb{Z}/p}(\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}_p) \cong (\mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{F}_p)/\mathrm{H}^{>(n-1)(p-1)}(\mathbb{Z}/p; \mathbb{F}_p)) \widetilde{\oplus} C$
для некоторой подалгебры $C \subset H^*(\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}_p)^{\mathbb{Z}/p}$.

Вот набросок доказательства (1) при $p > 3$. (Остальные случаи аналогичны, но сложнее).

В общем случае имеем спектральную последовательность

$$E_2^{i,*} = \mathrm{H}^i(\mathfrak{S}_k; \mathcal{H}^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k})) \Rightarrow H^{i+j}(C_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k}).$$

При этом

$$H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} L_\lambda, \quad L_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k} \bigotimes_i L_{(\lambda_i)}.$$

поэтому второй лист такой: $E_2 = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_k; \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k}(\bigotimes_i L_{\lambda_i}))$. Мы хорошо понимаем его края:

- Нулевая строка: $E_2^{*,0} = \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_k; \mathbf{k})$ — известные группы;
- Нулевой столбец: $E_2^{0,*} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{S}_k; \mathcal{H}^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n; \mathbf{k})) = H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k})^{\mathfrak{S}_k}$ — мы уже вычисляли (если $6 \in \mathbf{k}^\times$, то это $\mathbf{k} \cdot 1$ при нечётных n и $\mathbf{k} \cdot \{1, \alpha_{n-1}\}$ при чётных n);
- Верхняя строка: $E_2^{*,(n-1)(k-1)} \cong \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_k; L_{(k)})$, $E_2^{*,>(n-1)(k-1)} = 0$.

Оказывается, внутри ничего нет.

Лемма 7.18 (Vanishing lemma)**.** *Пусть $k = p$, $\lambda \neq (p)$, $\lambda \neq (1, \dots, 1)$. Тогда* $\mathrm{H}^{>0}(\mathfrak{S}_p; L_\lambda \otimes \mathbb{F}_p) = 0$.

Доказательство. По лемме Шапиро,

$$\mathrm{H}^i(\mathfrak{S}_p; L_\lambda) = \mathrm{H}^i(\mathfrak{S}_p; \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_k}(\bigotimes_i L_{\lambda_i})) \cong \mathrm{H}^i(\mathfrak{S}_\lambda; M), \quad M = \bigotimes_i L_{(\lambda_i)}.$$

При этом $|\mathfrak{S}_\lambda| = \prod \lambda_i! \cdot \prod_s n_s!$, поэтому при наших условиях $|\mathfrak{S}_\lambda|$ не делится на p. Но M — $\mathbb{F}_p$-модуль; поэтому из трансфера следует, что $\mathrm{H}^{>0}(\mathfrak{S}_\lambda; M) \cong \mathrm{H}^{>0}(e; M)^{\mathfrak{S}_\lambda} = 0$. □

Поэтому при $p > 3$ спектральная последовательность состоит из трёх частей:

- Нулевой строки $E_2^{*,0} = \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p)$,
- $(k-1)(p-1)$-ой строки $E_2^{*,(k-1)(p-1)} = \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_p; L_{(p)})$;
- Если n чётно — есть ещё элемент $\alpha \in E_2^{0,p-1}$.

Лемма 7.19 (Коэн)**.** $d_n(\alpha) = 0 \in E_2^{p,0} \cong \mathrm{H}^p(\mathfrak{S}_p; \mathbf{k})$. □

Лемма 7.20. $H^{>(n-1)(k-1)}(C_k(\mathbb{R}^n); \mathbf{k}) = 0$ *для любого* $\mathbf{k}$.

Набросок доказательства. $C_k(\mathbb{R}^n)$ — некомпактное nk-мерное многообразие, поэтому достаточно доказать, что его одноточечная компактификация $(k+n-2)$-связна. Она гомеоморфна пространству орбит для $\mathfrak{S}_k \curvearrowright (S^n)^{\wedge k}/\Delta_{fat}$; высокую связность этого пространства доказал Накаока. □

Итак, у нас есть вечный цикл $\alpha \in E_2^{0,n-1}$ и две строки — 0-я и $(n-1)(p-1)$-ая, причём у цели нет гомологий в размерностях $> (n-1)(p-1)$. Значит, верхняя строка убивает нижнюю, и умирает сама. То есть, на цели остаётся только $\mathrm{H}^{\leq (n-1)(p-1)}(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p)$ и вечный цикл.

7.6. **Операции в гомологиях $\mathcal{E}_n$-алгебр.** Это ещё одно применение вычислений Коэна.

Зафиксируем подгруппу $G \subset \mathfrak{S}_k$. Вспомним обозначение: $\mathbf{k}(1)$ — знаковое представление группы $\mathfrak{S}_k$; таким образом, $\mathbf{k}(q) := \mathbf{k}(1)^{\otimes q}$ — тривиальное представление при чётных q и знаковое при нечётных. Например, если $M = \mathbf{k} \cdot x$, $|x| = q$, то $\mathfrak{S}_k$-модуль $M^{\otimes k}$ изоморфен $\mathbf{k}(q)$.

Лемма 7.21 (см. [May70, Lemma 1.1])**.** *Пусть C_* — цепной комплекс, $V_* \curvearrowleft G$ — свободное действие на цепном комплексе. Тогда элементам $\alpha \in H_*((V \otimes \mathbf{k}(q))/G)$, $x \in H_q(C)$ можно сопоставить корректно определённый элемент $\lambda(\alpha, x) \in H_{|\alpha|+kq}(V \otimes_G C^{\otimes k})$ по формуле*

$$\lambda([a], [c]) := [a \otimes c^{\otimes k}]$$

(где цепь $a \in V$ переходит в цикл $\in V/G$, который задаёт α, а цикл $c \in C$ задаёт x). □

Замечание 7.22. Вот зачем подкручивать на $\mathbf{k}(q)$: по условию, $d(a) \in \mathrm{Ker}(V \otimes \mathbf{k}(q) \to (V \otimes \mathbf{k}(q))/G)$, то есть $d(a) = \sum_{g \in G} b_g - (-1)^{q|g|} b_g \cdot g$ (знак появился из-за подкрутки). Нам нужно, чтобы элемент $a \otimes c^{\otimes k} \in V \otimes_G C^{\otimes k}$ был циклом. Так и есть:

$$d(a \otimes c^{\otimes k}) = d(a) \otimes c^{\otimes k} = \sum_g b_g \otimes c^{\otimes k} - (-1)^{q|g|} b_g.g \otimes c^{\otimes k},$$

вычитаемое равно $(-1)^{q|g|} b_g \otimes g.c^{\otimes k} = b_g \otimes c^{\otimes k}$, что и требовалось.

Следствие 7.23. *Пусть $Y \curvearrowleft G$ свободно, X — топологическое пространство. Тогда элементам $\alpha \in H_*(Y/G; \mathbf{k}(q))$, $x \in H_q(X; \mathbf{k})$ соответствует корректно определённый элемент*

$$\lambda(\alpha, x) \in H_{|\alpha|+kq}(C_*(Y; \mathbf{k}) \otimes_G C_*(X; \mathbf{k})^{\otimes k}).$$

Доказательство. Применяем лемму к $V = C_*(Y; \mathbf{k})$, $C = C_*(X; \mathbf{k})$. Действие свободно, поэтому $(V \otimes \mathbf{k}(q))/G = (C_*(Y) \otimes \mathbf{k}(q))/G \cong C_*(Y/G; \mathbf{k}(q))$ — комплекс цепей для гомологий со скрученными коэффициентами. □

Пусть теперь X — $\mathcal{E}_n$-алгебра, $n \geq 2$. Структурное отображение $\theta_k : \mathcal{E}_n(k) \times X^{\times k} \to X$ задаёт $\mathfrak{S}_k$-эквивариантное отображение

$$C_*(\mathcal{E}_n(k)) \otimes C_*(X)^{\otimes k} \xrightarrow{EZ} C_*(\mathcal{E}_n(k) \times X^{\times k}) \to C_*(X)$$

и, следовательно, цепное отображение $\theta' : C_*(\mathcal{E}_n(k)) \otimes_G C_*(X)^{\otimes k} \to C_*(X)$. (Здесь критически важно, что EZ эквивариантное!) На гомологиях получаем

$$\theta'_* : H_*(C_*(\mathcal{E}_n(k)) \otimes_G C_*(X)^{\otimes k}) \to H_*(X).$$

Значит, всякому классу $\alpha \in H_*(\mathcal{E}_n(k)/G; \mathbf{k}(q))$ соответствует естественная операция

$$\widehat{\alpha} : H_q(X; \mathbf{k}) \to H_{|\alpha|+kq}(X; \mathbf{k}), \quad x \mapsto \theta'_*(\lambda(\alpha, x)).$$

Из теоремы Коэна следует:

Предложение 7.24. *Имеем каноническое прямое слагаемое* $\mathrm{H}_{\leq (n-1)(p-1)}(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p(q)) \subset H_*(C_p(\mathbb{R}^n); \mathbb{F}_p(q))$.

Таким образом, в гомологиях $\mathcal{E}_n$-алгебр есть операции, соответствующие классам в гомологиях симметрической группы — *операции Дайера–Лашофа.*

8. Алгебра Дайера–Лашофа (30 марта)

(Бонусная лекция, по [Coh76].)

Это аналог алгебры Стинрода — алгебра операций в гомологиях $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебр, $0 \leq n \leq \infty$. Начнём с общей теории.

8.1. **Унарные операции в гомологиях алгебр над dg-операдами.**

Напоминание: $\mathbf{k}(q)$ — тривиальное представление $\mathfrak{S}_k$ при чётных q, и знаковое представление при нечётных. Если x — однородный элемент степени q, то $(\mathbf{k} \cdot x)^{\otimes k} \simeq \mathbf{k}(q)$ как $\mathfrak{S}_k$-модуль.

Предложение 8.1. *Пусть $\mathcal{O}$ — dg-операда над полем $\mathbf{k}$. Тогда пространство естественных операций $H_q(A) \to H_*(A)$ в гомологиях $\mathcal{O}$-алгебр изоморфно пространству*

$$\bigoplus_{k \geq 0} H_{*-kq}(\mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \mathbf{k}(q));$$

то есть, классы из $H_i(\mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \mathbf{k}(q))$ задают операции $H_q(A) \to H_{kq+i}(A)$.

В частности, пространство естественных операций в гомологиях $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебр изоморфно пространству $\bigoplus_{k \geq 0} H_*(\mathcal{E}_{n+1}(k)/\mathfrak{S}_k; \mathbf{k}(q)) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H_*(C_k(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbf{k}(q))$.

Доказательство. Вспомним: $\widetilde{T}_{\mathcal{O}}(C) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} C^{\otimes k}$ — свободная $\mathcal{O}$-алгебра, порождённая цепным комплексом C. Тогда $U_q := T_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbf{k}} \cdot c_q)$ — свободная $\mathcal{O}$-алгебра, порождённая циклом степени q, и

$$H_*(U_q) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H_*(\mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} (\mathbf{k} \cdot c_q)^{\otimes k}) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H_{*-kq}(\mathcal{O}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \mathbf{k}(q)).$$

Морфизм $1 \otimes \mathrm{id} : (\mathbf{k} \cdot c_q, 0) \to \mathcal{O}(1) \otimes \mathbf{k}(q) \hookrightarrow U_q$ задаёт фундаментальный класс $\iota_q \in H_q(U_q)$.

Пусть теперь $\alpha : H_q(-) \to H_{q+i}(-)$ — естественная операция в гомологиях $\mathcal{O}$-алгебр. Значит, операции соответствует элемент $\alpha(\iota_q) \in H_{q+i}(U_q)$. Теперь если $x = [c] \in H_q(A)$ — класс в гомологиях какой-то $\mathcal{O}$-алгебры, то цепное отображение $c : (\mathbf{k} \cdot c_q, 0) \to (A, d)$ продолжается до морфизма $\mathcal{O}$-алгебр $f : U_q \to A$, $c_*(\iota_q) = c$. Из естественности, $\alpha(x) = f_*(\alpha(\iota_q)) \in H_{q+i}(A)$.

Обратно: если $\alpha \in H_{q+i}(U_q)$, то всякому циклу $c \in A_q$ соответствует элемент $f_*(\alpha) \in H_{q+i}(A)$. Если заменить c на $c' = c + d(e)$, этот элемент не изменится — как раз по лемме 7.21. □

8.2. **Операции в гомологиях $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебр: общий случай.** Помним: если A — $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебра, то $H(A)$ — алгебра над операдой $H(\mathbb{E}_{n+1}) \cong \mathsf{e}_{n+1}$. То есть, $H(A)$ — ассоциативная алгебра при $n = 0$, а при $n > 0$ это коммутативная алгебра, причём умножение на ней согласовано со скобкой Браудера $\lambda_n : H_{i-n}(A) \otimes H_{j-n}(A) \to H_{i+j-n}(A)$. Посмотрим на унарные операции.

- Класс $1 \in H_0(C_k(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbf{k}(q))$ всегда соответствует операции $H_q \to H_{kq}$, $x \mapsto x^k$.
- Если $n = 0$: $H_*(C_k(\mathbb{R}); \mathbf{k}(q)) = H_*(\mathrm{pt}; \mathbf{k}(q)) = \mathbf{k} \cdot 1$, поэтому других операций нет. Дальше $n \geq 1$.
- Если $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$: пространство операций — это инварианты,
$$H_*(C_k(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{Q}(q)) \cong (H_*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}(q))^{\mathfrak{S}_k}.$$
При чётных q мы это вычисляли: получаем $\mathbb{Q} \cdot 1$ при чётных n и $\mathbb{Q} \cdot \{1, \alpha_n\}$ при нечётных n. Класс $\alpha \in H_n(C_k; \mathbb{Q})$ соответствует операции $H_q \to H_{kq+n}$, $x \mapsto \lambda(x,x)x^{k-2}$. Задача: разобраться с нечётным q.

В положительной характеристике ситуация следующая. При $p > 2$ мы построим в гомологиях $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебр над $\mathbb{F}_p$ операции Дайера–Лашофа
$$Q^s : H_{i-n}(A) \to H_{i-n+2(p-1)s}(A), \quad 0 \leq s < i/2,$$
которые ведут себя "примерно как алгебра Стинрода". Также определена нестабильная операция
$$\text{“}Q^{i/2}\text{”} = \xi : H_{i-n}(A) \to H_{pi-n}(A) \quad \text{для чётных } i.$$
Оказывается, что относительно скобки Браудера λ операция ξ ведёт себя как "возведение в p-ую степень", то есть $(H_{*-n}(A), \xi, \lambda)$ — p-ограниченная алгебра Ли.

При $p = 2$ происходит то же, но в других градуировках:
$$Q^s : H_{i-n}(A) \to H_{i-n+s}(A), \quad 0 \leq s < i, \quad \xi : H_{i-n}(A) \to H_{2i-n}(A) \text{ для всех } i.$$

Теперь если $A = C_*(X; \mathbf{k})$, где X — $\mathcal{E}_{n+1}$-алгебра, то из топологии на $H(A)$ возникает дополнительная структура: действие алгебры Стинрода, двойственное к действию на $H^*(X; \mathbb{F}_p)$; cup-коумножение; если $\pi_0(X)$ является группой — антипод (соответствующий обращению для умножения Понтрягина). Операции λ, Q^s, ξ согласованы с этой структурой; соответствующие тождества получил Фред Коэн. (При $n = \infty$ это было известно и ранее.)

8.3. **Операции ДЛ, dg-случай.** Вспомним результаты Коэна и классические вычисления.

Предложение 8.2. *$H_{\leq(p-1)n}(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p(q)) \subset H_*(C_p(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{F}_p(q))$ прямым слагаемым.* □

Предложение 8.3. $\mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p(q)) = \mathbf{k} \cdot \{e_{(p-1)i}, e_{(p-1)i-1} \mid i \equiv q \mod 2\}$. □

Поэтому при $i \equiv q \mod 2$, $1 \leq i \leq n$, класс $e_{(p-1)i} \in \mathrm{H}_{(p-1)i}(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p(q)) \subset H_*(C_p(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{F}_p(q))$ задаёт операцию
$$Q_i : H_q(A) \to H_{pq+(p-1)i}(A)$$
в гомологиях любой $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебры A.

8.3.1. *Случай $p > 2$.*

Определение 8.4. Пусть X — $\mathcal{E}_{n+1}$-алгебра над $\mathbb{F}_p$, $n \geq 1$, $p > 2$. *Операции Дайера–Лашофа* — это
$$Q^s := \pm((p-1)/2)!^{-q} \cdot Q_{(2s-q)(p-1)} : H_q(A) \to H_{q+2(p-1)s}(A), \quad q/2 \leq s < (q+n)/2.$$
Доопределим $Q^s(x) := 0$ при $0 \leq s < q/2$ и
$$\xi_n(x) := \text{“}Q^{(q+n)/2}\text{”} : H_q(A) \to H_{pq+(p-1)n}(A), \quad q + n \equiv 0 \mod 2.$$

Заметим, что $Q^s : H_{q-n} \to H_{q+2(p-1)s-n}$, поэтому $\xi_n : H_{2t-n}(A) \to H_{2pt-n}(A)$.

Замечание 8.5. Классы $e_{(p-1)i-1} \in H_{(p-1)i-1}(\mathfrak{S}_p; \mathbb{F}_p(q))$ приводят к операциям вида
$$\beta Q^s : H_q(A) \to H_{q+2(p-1)s-1}(A);$$
если $n + q$ чётно — ещё возникает операция
$$\zeta_n(x) := \text{“}\beta Q^{(|x|+n)/2}\text{”} : H_q(A) \to H_{pq+(p-1)n-1}(A).$$

В случае, когда $A = B \otimes \mathbb{F}_p$, где B — $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебра над $\mathbb{Z}$, имеем $\beta Q^s(x) = \beta(Q^s(x))$, где $\beta : H_*(B) \to H_{*-1}(B)$ — гомоморфизм Бокштейна. (В общем случае он не определён, и βQ^s надо рассматривать как единый символ.) При этом $\beta(\xi(x)) \neq \zeta(x)$: есть поправка.

Теорема 8.6. *Пусть A — $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебра над $\mathbb{F}_p$, $n \geq 1$, $p > 2$. Тогда в $H(A)$ определо коммутативное умножение, скобка Браудера*

$$\lambda_n : H_{i-n}(A) \otimes H_{j-n}(A) \to H_{i+j-n}(A),$$

стабильные операции Дайера–Лашофа

$$Q^s : H_*(A) \to H_{*+2(p-1)s}(A), \quad 0 \leq s \leq (*+n)/2$$

и нестабильная операция $\xi_n : H_{2t-n}(A) \to H_{2pt-n}(A)$, причём

(1) *Операции Дайера–Лашофа удовлетворяют свойствам:*
- $Q^{<|x|/2}(x) = 0$, $Q^{|x|/2}(x) = x^p$, $Q^{>0}(1) = 0$;
- *(Формула Картана)* $Q^s(x \cdot y) = \sum_{s=i+j} Q^i(x) \cdot Q^j(y)$;
- *(Соотношения Адема)*

$$Q^r Q^s = \sum_i (-1)^{r+i} \binom{pi - r}{r - (p-1)s - i - 1} Q^{r+-i} Q^i, \ r > ps;$$

$$Q^r \beta Q^s = \sum_i (-1)^{r+i} \Big(\binom{pi - r}{r - (p-1)s - i} \beta Q^{r+s-i} Q^i - \binom{pi - r - 1}{r - (p-1)s - i} Q^{r+s-i} \beta Q^i \Big), \ r \geq ps;$$

(2) *ξ ведёт себя как $Q^{(n+q)/2}$, но с некоторыми поправками в формулах;*

(3) *λ_n и ξ_n задают на H_{*-n} структуру p-ограниченной алгебры Ли (то есть, H_{*-n} можно вложить в ассоциативную $\mathbb{F}_p$-алгебру так, что λ_n перейдёт в коммутатор, а ξ_n перейдёт в операцию $\alpha \mapsto \alpha^p$). Другими словами,*
- *λ_n градуированно-антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби;*
- $\lambda(x, \xi(y)) = \lambda(\dots \lambda(\lambda(x, \underbrace{y), y) \dots, y}_{p})$;
- $\xi(kx) = k^p x$, $\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y) +$ [*явный лиевский многочлен*].

(4) *Если A — $\mathbb{E}_{n+2}$-алгебра, то $\lambda_n \equiv 0$ и $\xi_n = Q^{(n+q)/2}$.*

8.3.2. *Случай $p = 2$.* При $p = 2$ определены классы $e_i \in H_i(\mathfrak{S}_2; \mathbb{F}_2(q))$, $0 \leq i \leq n-1$. Поэтому возникают операции $Q_i : H_q(X; \mathbb{F}_2) \to H_{q+i}(X; \mathbb{F}_2)$ и

$$Q^s := Q_{q-s} : H_q(X; \mathbb{F}_2) \to H_{q+s}(X; \mathbb{F}_2), \quad q \leq s < n + q,$$

$Q^s := 0$, $q < s$, и нестабильная операция

$$\xi_n := \text{“}Q^{n+q}\text{”} : H_q(X; \mathbb{F}_2) \to H_{2q+n}(X; \mathbb{F}_2).$$

Опять видим, что $\xi_n : H_{q-n} \to H_{2q-n}$ удваивает степень на H_{*-n}, но теперь определено и для нечётных q.

Теорема 8.7. *Пусть A — $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебра над $\mathbb{F}_2$, $n \geq 1$. Тогда в $H(A)$ определо коммутативное умножение, скобка Браудера*

$$\lambda_n : H_{i-n}(A) \otimes H_{j-n}(A) \to H_{i+j-n}(A),$$

стабильные операции Дайера–Лашофа

$$Q^s : H_*(A) \to H_{*+s}(A), \quad 0 \leq s < * + n$$

и нестабильная операция $\xi_n : H_{*-n}(A) \to H_{2*-n}(A)$, причём

(1) *Операции Дайера–Лашофа удовлетворяют свойствам:*
- $Q^{<|x|/2}(x) = 0$, $Q^{|x|/2}(x) = x^2$, $Q^{>0}(1) = 0$;
- *(Формула Картана)* $Q^s(x \cdot y) = \sum_{s=i+j} Q^i(x) \cdot Q^j(y)$;
- *(Соотношения Адема)*

$$Q^r Q^s = \sum_i (-1)^{r+i} \binom{2i - r}{r - s - i - 1} Q^{r+-i} Q^i, \ r > 2s;$$

(2) *ξ ведёт себя как $Q^{(n+q)/2}$, но с некоторыми поправками в формулах;*

(3) *λ_n и ξ_n задают на H_{*-n} структуру 2-ограниченной алгебры Ли (то есть, H_{*-n} можно вложить в ассоциативную $\mathbb{F}_p$-алгебру так, что λ_n перейдёт в коммутатор, а ξ_n перейдёт в операцию $\alpha \mapsto \alpha^2$). Другими словами,*
- *λ_n градуированно-антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби;*
- $\lambda(x, \xi(y)) = \lambda(\lambda(x, y), y)$;

- $\xi(kx) = k^2 x$, $\xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y) + \lambda(x,y)$.

(4) $\lambda(x, Q^s(y)) = \lambda(Q^s(x), y)$.

(5) *Если A — $\mathbb{E}_{n+2}$-алгебра, то $\lambda_n \equiv 0$ и $\xi_n = Q^{(n+q)/2}$.*

8.4. **Операции ДЛ, случай пространств.** Если наша $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебра A имеет вид $C_*(X;\mathbb{F}_p)$, где X — $\mathcal{E}_{n+1}$-алгебра, то помимо операций Q^s, ξ_n, λ_n и умножения Понтрягина, возникают

- Гомоморфизм Бокштейна $\beta : H_*(X;\mathbb{F}_p) \to H_{*-1}(X;\mathbb{F}_p)$;
- Коумножение $\Delta : H_*(X;\mathbb{F}_p) \to H_*(X;\mathbb{F}_p) \otimes H_*(X;\mathbb{F}_p)$, $\Delta(x) =: \sum x' \otimes x''$;
- Операции, двойственные к операциям Стинрода: $P^i_* : H_*(X;\mathbb{F}_p) \to H_{*-2(p-1)i}(X;\mathbb{F}_p)$ при $i > 2$ и $Sq^i_* : H_*(X;\mathbb{F}_2) \to H_{*-i}(X;\mathbb{F}_2)$.

(На самом деле для любого пространства X на $C^*(X;\mathbb{F}_p)$ есть структура $\mathbb{E}_\infty$-алгебры; операции Стинрода — это операции Дайера–Лашофа для этой структуры).

Эти структуры согласованы: например, умножение Понтрягина и коумножение образуют алгебру Хопфа. Поэтому естественно ожидать, что и операции каким-то образом согласованы. Ответ такой.

Теорема 8.8. *Пусть X — $\mathcal{E}_{n+1}$-алгебра, $n \geq 1$, $p > 2$. Введём операцию*

$$\zeta_n(x) := \beta(\xi_n(x)) - \lambda(\dots\lambda(\lambda(\beta x, \underbrace{x), x)\dots, x}_{p-1}) : H_{2t-n}(X;\mathbb{F}_p) \to H_{2pt-1-n}(X;\mathbb{F}_p).$$

Тогда

(1) *Операции Дайера–Лашофа удовлетворяют свойствам:*
- *(Внешняя формула Картана)* $\Delta(Q^s(x)) = \sum_{s=i+j} Q^i(x') \otimes Q^j(x'')$;
- *(Соотношения Нисиды)*

$$P^r_* Q^s = \sum_i (-1)^{r+i} \binom{r - pi}{s(p-1) - pr + pi} Q^{s-r+i} P^i_*,$$

$$P^r_* \beta Q^s = \sum_i (-1)^{r+i} \left(\binom{r - pi}{s(p-1) - pr + pi - 1} \beta Q^{s-r+i} P^i_* + \binom{r - pi - 1}{s(p-1) - pr + pi} Q^{s-r+i} P^i_* \beta \right).$$

(2) *λ_n и ξ_n удовлетворяют свойствам:*
- $\Delta(\lambda(x,y)) = \sum \pm\lambda(x', y') \otimes x''y'' \pm x'y' \otimes \lambda(x'', y'')$;
- $\beta(\lambda(x,y)) = \pm\lambda(\beta x, y) \pm \lambda(x, \beta y)$;
- $P^s_*(\lambda(x,y)) = \sum_{i+j=s} \lambda(P^i_*(x), P^j_*(y))$;
- *ξ_n ведёт себя как $Q^{(n+|x|)/2}$ с некоторыми поправками в формулах.*

(3) $\boxed{\lambda(x, \zeta(y)) = 0.}$

При $p > 2$ ситуация аналогичная (в частности, операция $\zeta(x) := \beta(\xi(x)) + \lambda(x, \beta x)$ удовлетворяет соотношению $\lambda(\zeta(x), y) = 0$.)

8.5. **Два приятных частных случая.** Пусть $n = 1$, то есть A — $\mathbb{E}_2$-алгебра. Тогда вся описанная выше структура сводится к следующей: помимо коммутативного умножения Понтрягина, есть

- Скобка Браудера $\lambda : H_{i-1}(A) \otimes H_{j-1}(A) \to H_{i+j-1}(A)$ и
- нестабильная операция $\xi : H_{2t-1}(A) \to H_{2pt-1}(A)$ (соотв., $\xi : H_{i-1}(A) \to H_A(X;\mathbb{F}_2)$;
- Единственная стабильная операция $Q^t : H_{2t}(X;\mathbb{F}_p) \to H_{2pt}(X;\mathbb{F}_p)$, $x \mapsto x^p$ (соотв., $H_q(X;\mathbb{F}_2) \to H_{2q}(X;\mathbb{F}_2)$, $x \mapsto x^2$).

они задают на $(H_{*-1}(A), \lambda, \xi)$ структуру p-ограниченной алгебры Ли, причём λ согласована с умножением Понтрягина. На гомологиях $\mathcal{E}_2$-алгебр возникает ещё одна операция $\zeta : H_{2t-1} \to H_{2pt-2}$, $\lambda(x, \zeta(y)) = 0$, и согласованность этой структуры с коумножением и действием алгебры Стинрода.

Наоборот, пусть $n = \infty$. Тогда нестабильных операций λ, ξ, ζ нет, есть только операции Дайера–Лашофа

$$Q^s : H_*(X;\mathbb{F}_p) \to H_{*+2(p-1)s}(X;\mathbb{F}_p), \quad s \geq 0$$

который во многом похожи на степени Стинрода $P^r_* : H_*(X;\mathbb{F}_p \to H_{*-2(p-1)r}(X;\mathbb{F}_p)$ и согласованы с ними. А именно, в гомологиях $\mathbb{E}_\infty$-алгебр имеем:

- $Q^{<|x|/2}(x) = 0$, $Q^{|x|/2}(x) = x^p$, $Q(1) = 1$;

- $Q(x \cdot y) = Q(x) \cdot Q(y)$;
- Соотношения Адема;

Если теперь эта $\mathbb{E}_\infty$-алгебра приходит из гомологий некоторой $\mathcal{E}_\infty$-алгебры, $A = H_*(X; \mathbf{k})$ — на ней действуют операции Стинрода и cup-коумножение. Согласованность — это соотношения Нисиды и внешняя формула Картана $\Delta(Q(x)) = \sum Q(x') \otimes Q(x'')$.

8.6. **Гомологии свободных E_{n+1}-алгебр.** С гомологиями свободных $\mathbb{E}_{n+1}$-алгебр можно разобраться так. Знаем:

$$H(T_{\mathbb{E}_{n+1}}(C)) = \bigoplus_{k \geq 0} H(\mathbb{E}_{n+1}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} C^{\otimes k}).$$

Над полем всякий цепной комплекс квази-изоморфен прямой сумме комплексов $0 \to \mathbf{k} \to 0$, которые соответствуют алгебрам $\bigoplus_{k \geq 0} H_*(C_k(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbf{k}(q))$. В частности, при $n = 1$ имеем $\bigoplus_k \mathrm{H}(Br_k; \mathbf{k}(q))$, а при $n = \infty$ имеем $\bigoplus_k \mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_k; \mathbf{k}(q))$.

Оказывается, гомологии свободных $\mathcal{E}_{n+1}$-алгебр, $T_{\mathcal{E}_{n+1}}(X)$, — функтор от гомологий X. Он описывается так:

- *Ограниченная λ_n-алгебра* — это градуированный $\mathbb{F}_p$-модуль L вместе с операциями $\lambda : L_{i-n} \otimes L_{j-n} \to L_{i+j-n}$ для всех i, j, $\xi : L_{i-n} \to L_{pi-n}$, $\zeta : L_{i-n} \to L_{pi-n-1}$ для чётных i, которые удовлетворяют соответствующим тождествам.
- Функтор L_n из $\mathbb{F}_p$-модулей в ограниченные λ_n-алгебры строится так: $L_0(M) := \mathbb{L}^{[p]}(M)$ — свободная p-ограниченная алгебра Ли; $L_n(\sigma^{-n}M) := \sigma^{-n}L_0(M) \oplus \zeta_n(\sigma^{-n}L_0(M))$.
- Функтор D_n из $\mathbb{F}_p$-модулей в модули над алгеброй Дайера–Лашофа: $D_n(L) := \bigoplus_{q \geq 0} R_n(q) \otimes L_q$, где $\mathbf{k}$-модуль $R_n(q)$ формально порождён соответствующими допустимыми мономами от операций Дайера–Лашофа.
- Для $\mathbb{F}_p$-модуля D с действием операций Дайера–Лашофа введём алгебру Хопфа
$$V_n(D) := \mathrm{Sym}(D)/(x^p = Q^s(x),\ x \in D_{2s}).$$
- Для коалгебры M положим $W_n(M) := V_n(J)$, где J — аугментационный идеал алгебры $D_n(L_n(M))$.

Теорема 8.9 (Коэн). *Пусть $n \geq 1$, $p \geq 2$. Тогда $H_*(T_{\mathcal{E}_{n+1}}(X); \mathbb{F}_p) \cong W_n(\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F}_p))$.* □

Следствие 8.10. *Пусть X связно и $n \geq 1$. Тогда $H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X; \mathbb{F}_p) \cong W_n(\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F}_p))$.*

Доказательство. По теореме об аппроксимации, $T_{\mathcal{E}_{n+1}}(X) \simeq \Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$. □

Случай одномерных модулей $\mathbf{k} \cdot c_q$, $|c_q| = q$:

Следствие 8.11. (1) *$W_n(\mathbb{F}_p \cdot c_0) \cong H_*(T_{\mathcal{E}_{n+1}}(S^0); \mathbb{F}_p) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H_*(C_k(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{F}_p)$, где умножение на правой части задаётся “конкатенацией конфигураций”*

$$C_k(\mathbb{R}^n) \times C_\ell(\mathbb{R}^n) \to C_{k+\ell}(\mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\iota_*} C_{k+\ell}(\mathbb{R}^n), \quad \iota : \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n.$$

В частности,

$$W_1(\mathbb{F}_p \cdot c_0) \cong \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{H}_*(\mathrm{Br}_k; \mathbb{F}_p), \quad W_\infty(\mathbb{F}_p \cdot c_0) \cong \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_k; \mathbb{F}_p).$$

(2) *При $q \geq 1$, $W_n(\mathbb{F}_p \cdot c_q) \cong H_*(\Omega^{n+1}S^{n+1+q}; \mathbb{F}_p)$.*

Доказательство. $T_{\mathcal{O}}(S^0) \cong \widetilde{T}_{\mathcal{O}}(\mathrm{pt}) \cong \coprod_{k \geq 0} \mathcal{O}(k)/\mathfrak{S}_k$. □

Замечание 8.12. При $n = 0$ функтор ещё проще: теорема Ботта–Самельсона даёт $H_*(T_{\mathcal{E}_1}(X); \mathbb{F}) \cong T(\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F}))$. В частности, $H_*(\Omega S^{q+1}; \mathbb{F}) \cong T(c_q)$ как алгебра Хопфа.

Ситуация особенно простая в случае $n = 2$: здесь единственная стабильная операция Дайера–Лашофа — это и есть возведение в p-ую степень. Поэтому можно не действовать этими операциями — всё действие профакторизуется. Получаем

$$(H_*(\Omega^2\Sigma^2X; \mathbb{F}_p) \cong) H_*(T_{\mathcal{E}_2}(X); \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{Sym}(L_1(\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F}_p))) := \mathrm{Sym}(\sigma^{-1}\mathbb{L}^{[p]}(C)) \otimes \mathrm{Sym}(\zeta_1(\sigma^{-1}\mathbb{L}^{[p]}(C))),$$

$$C = \sigma\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F}_p), \quad \zeta_1 : H_{2t-1} \to H_{2pt-2}.$$

Вот пара вычислений.

Теорема 8.13. *$H_*(\Omega^2 S^{2s+1};\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[e_0, e_1, \dots]$, $|e_i| = 2s2^i - 1$;*
$$H_*(\Omega^2 S^{2s+1};\mathbb{F}_p) = \Lambda[e_0, e_1, \dots] \otimes \mathbb{F}_p[f_1, f_2, \dots], \quad |e_i| = 2sp^i - 1,\ |f_i| = 2sp^i - 2.$$

Доказательство. Разберём только случай $p > 2$. У нас $C = \sigma\widetilde{H}_*(S^{2s+1};\mathbf{k}) = \mathbf{k}\cdot\alpha_{2s}$ — одномерный модуль в чётной градуировке. Порождённая им свободная p-ограниченная алгебра Ли имеет тривиальную скобку, зато неограниченно много возведений в p-ую степень:
$$\mathbb{L}^{[p]}(C) = \mathbf{k}\cdot\{\alpha, \alpha^{[p]}, (\alpha^{[p]})^{[p]}, \dots\} = \mathbf{k}\cdot\{\gamma_0, \gamma_1, \dots\}, \quad |\gamma_i| = 2p^i s.$$
Поэтому
$$L_1(\sigma C) = \mathbf{k}\cdot\{\sigma^{-1}\gamma_0, \sigma^{-1}\gamma_1, \dots; \zeta_1(\sigma^{-1}\gamma_0), \zeta_1(\sigma^{-1}(\gamma_1)), \dots\}, \quad |\sigma^{-1}\gamma_i| = 2sp^i - 1,\ \zeta_1(\sigma^{-1}\gamma_i) = 2p\cdot sp^i - 2.$$
Осталось переобозначить $e_i := \sigma^{-1}\gamma_i$, $f_i := \zeta_1(\sigma^{-1}\gamma_{i-1})$. □

Вот ещё одно следствие: гомологии групп кос.

Теорема 8.14. *Биградуированная алгебра $H_*(T_{\mathcal{E}_2}(S^0);\mathbb{F}_p) \cong \bigoplus_{k\ge 0}\mathrm{H}_*(\mathrm{Br}_k;\mathbb{F}_p)$ (относительно подстановочного умножения) имеет вид*
$$H_*(T_{\mathcal{E}_2}(S^0);\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[h, x_1, x_2, \dots], \quad h \in \mathrm{H}_0(\mathrm{Br}_1;\mathbb{F}_2),\ x_i \in \mathrm{H}_{2^i-1}(\mathrm{Br}_{2^i};\mathbb{F}_2),$$
$$H_*(T_{\mathcal{E}_2}(S^0);\mathbb{F}_p) \cong \Lambda[x_0, x_1, \dots] \otimes \mathbb{F}_p[h, y_1, y_2, \dots],$$
$$x_i \in H_{2p^i-1}(\mathrm{Br}_{2p^i};\mathbb{F}_p),\ h \in \mathrm{H}_0(\mathrm{Br}_1;\mathbb{F}_p),\ y_i = \beta x_i \in \mathrm{H}_{2p^i-2}(\mathrm{Br}_{2p^i};\mathbb{F}_p).$$

Доказательство. Это $\mathrm{Sym}(\sigma^{-1}\mathbb{L}^{[p]}(x)) \otimes \mathrm{Sym}(\zeta_1(\sigma^{-1}\mathbb{L}^{[p]}(x)))$, $\deg x = 1$. □

Следствие 8.15. $\mathrm{H}_*(\mathrm{Br}_k;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\xi_0, \xi_1, \dots]/(\prod \xi_j^{k_j} = 0,\ \sum k_j 2^j > r)$, $|\xi_j| = 2^j - 1$. □

9. Аппроксимации пространств отображений (6 апреля)

По [Bod87] и [Knu18, §6].

Теорема Милгрэма–Мэя звучит так: если $X \in \mathcal{T}op_*$ связно и $1 \le n \le \infty$, то имеем эквивалентность $\mathcal{E}_n$-алгебр $\gamma : T_{\mathcal{E}_n}(X) \xrightarrow{\sim} \Omega^n\Sigma^n X$. Сегодня мы докажем её обобщение.

Напоминание: $X \in \mathcal{T}op_*$ порождает свободную $\mathcal{E}_n$-алгебру $T_{\mathcal{E}_n}(X)$. Точки этого пространства — неупорядоченные наборы непересекающихся маленьких дисков в $\mathbb{R}^n$, каждый из которых помечен точкой в X; диск разрешено убрать, если его метка равна x_0. $T_{\mathcal{E}_n}(X)$ — топологический моноид относительно “конкатенации” $\mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Тогда γ — это вот какое “сканирующее отображение”
$$\gamma : T_{\mathcal{E}_n}(X) \xrightarrow{\sim} Map_*(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, S^n \wedge X) \cong \Omega^n\Sigma^n X :$$
сначала факторизуем по дополнению дисков и отображаем $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ в букет сфер, соответствующих дискам; дальше сферу с меткой x отображаем как $S^n \cong S^n \wedge \{x\} \subset S^n \wedge X$. Справа стоит пространство отображений, а слева — что-то вроде конфигурационного пространства.

9.1. Конф. пространства с метками.

Вот что получится, если вернуться от дисков к точкам.

Определение 9.1. Пусть $M \supset M_0$ — пара топологических пространств, и пусть $X \in \mathcal{T}op_*$. Обозначим
$$\mathcal{C}(M, M_0; X) := \Big(\bigsqcup_{k\ge 0} \mathrm{Conf}_k(M) \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\times k}\Big)/\sim, \quad \text{где}$$

- $[p_1, \dots, p_k; x_1, \dots, x_k] \sim (p_1, \dots, \widehat{p}_i, \dots, p_k; x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k)$, если $p_i \in M_0$ или $x_i = *$.

Точки пространства $\mathcal{C}(M, M_0; X)$ — это неупорядоченные наборы точек в M с метками из X; точка умирает, если она попадает в M_0 или её метка становится равна $* \in X$.

Обозначим $\mathcal{C}(M; X) := \mathcal{C}(M, \varnothing; X)$; тогда $T_{\mathcal{E}_n}(X)$ получается из $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X)$ заменой дисков на точки. Ещё один важный частный случай: если $X = S^0$, то можно считать, что у частиц нет меток. В частности, $\mathcal{C}(M; S^0) = \bigsqcup_{k\ge 0} C_k(M)$.

Ясно, что $\mathcal{C}(M, M_0; X)$ зависит только от гомотопического типа пространства X. Зависимость от (M, M_0) сложнее.

Предложение 9.2. *Пространство $\mathcal{C}(M, M_0; X)$ —*

- *функтор относительно инъективных непрерывных отображений пар (M, M_0);*
- *“инвариант монотопической эквивалентности”: монотопные отображения пар индуцируют гомотопные отображения конф. пространств;*

- *“сводится к приведённой версии”: если $M_0 \subset M$ замкнуто, то $\mathcal{C}(M, M_0; X) \simeq \mathcal{C}(M/M_0, M_0/M_0; X)$.*
- *“имеет аксиому вырезания”: если $U \subset M_0$ открыто в M, то $\mathcal{C}(M \setminus U, M_0 \setminus U; X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(M, M_0; X)$ — гомеоморфизм.*
- *“аддитивно”: если $M_{0i} \subset M_i$, то $\mathcal{C}(\bigsqcup_i M_i, \bigsqcup_i M_{i0}; X) \cong \bigsqcup_i \mathcal{C}(M_i, M_{i0}; X)$.* □

Более сложный результат, вариант которого мы сегодня обсудим:

Предложение 9.3. *Пусть $M_0 \subset M$ — подмногообразие коразмерности 0, причём X связно или (M, M_0) связна. Тогда $\mathcal{C}(M_0; X) \to \mathcal{C}(M; X) \to \mathcal{C}(M, M_0; X)$ — гомотопическое расслоение.* □

Короче, $\mathcal{C}(-; X)$ “ведёт себя как теория гомологий”.

Ещё одна интерпретация: пространство маленьких дисков в M с метками в X — это *тензорное произведение* (в операдном смысле) $\mathcal{E}'_M \otimes_{\mathcal{E}_n} T_{\mathcal{E}_n}(X)$. Действительно: $\mathcal{E}'_M$ — правый модуль над операдой $\mathcal{E}_n$, а $A = T_{\mathcal{E}_n}(X)$ — алгебра над ней, и возникают две стрелки

$$\mathcal{E}'_M(\sum_i \ell_i) \times A^{\times \sum \ell_i} \leftarrow \mathcal{E}'_M(k) \times \prod_{i=1}^{k} \mathcal{E}_n(\ell_i) \times A^{\times \sum \ell_i} \to \mathcal{E}'_M(k) \times A^{\otimes k}.$$

Коуравнитель полученной диаграммы

$$\bigsqcup_{k \geq 0} \bigsqcup_{\ell_1, \ldots, \ell_k} \mathcal{E}'_M(k) \times \prod_i \mathcal{E}_n(\ell_i) \times A^{\times \sum \ell_i} \rightrightarrows \bigsqcup_t \mathcal{E}'_M(t) \times A^{\times t}.$$

Так как $\mathcal{E}'_M(t)$ — маленькие диски на M, а T — маленькие диски на $\mathbb{R}^n$ с метками в X, то получаем маленькие диски на M с метками в X.

Вместо $T_{\mathcal{E}_n}(X)$ можно посадить на параллелизованное многообразие M любую $\mathcal{E}_n^{fr}$-алгебру A (или посадить на параллелизованное многообразие любую $\mathcal{E}_n$-алгебру); результат — это “топологические хиральные гомологии” $\int_M A$. Летом, наверно, ещё об этом поговорим.

На уровне монад конструкция ещё яснее: F — модуль над операдой T, X — алгебра над ней, тогда заданы $F \circ T \Rightarrow F$, $TX \to X$, и можно взять коуравнитель стрелок $F(T(X)) \rightrightarrows F(X)$.

9.2. **Пространства сечений.** Мотивация такая: $\Omega^n \Sigma^n X = Map((D^n, \partial(D^n)),\ (\Sigma^n X, *))$ — это пространство сечений рассслоения $D^n \times \Sigma^n X \to D^n$, тривиальных над ∂D^n.

Пусть W — гладкое n-мерное многообразие без края. Пусть $S^n \to \widehat{T}(W) \to W$ — послойная одноточечная компактификация касательного расслоения (слой над точкой $p \in W$ — это $T_p W \cup \{\infty_p\} \cong S^n$), и пусть $X \wedge S^n \to \widehat{T}(W; X) \to W$ — её послойный смэш с X. Для $A_0 \subset A \subset W$ возникает пространство “сечений над A, тривиальных над A_0”:

$$\Gamma(A, A_0; X) := \{\sigma : A \to \widehat{T}(W; X) \mid \widehat{\tau}(\sigma(p)) = p,\ p \in A; \quad \sigma(a) = \infty_p,\ p \in A_0\}.$$

Аналогично, $\Gamma(A; X) := \Gamma(A, \varnothing; X)$. Пространство сечений уже ведёт себя как теория когомологий.

Предложение 9.4. *Пространство $\Gamma(A, A_0; X)$ —*

- *контравариантный функтор относительно непрерывных отображений пар (A, A_0);*
- *инвариант гомотопической эквивалентности: гомотопные отображения индуцируют гомотопные отображения;*
- *сводится к приведённой версии, имеет аксиому вырезания, аддитивно.*

Предложение 9.5. $\Gamma(C, B; X) \to \Gamma(C, A; X) \to \Gamma(B, A; X)$ *— расслоение Серра, если $A \subset B \subset C$ — корасслоение.*

Доказательство. Задача (на раскрытие определений). □

Ещё можно ввести *пространство сечений с компактным носителем* $\Gamma_c(A; X)$ (носитель сечения σ — это замыкание множества $\{p \in A :\ \sigma(p) \neq \infty_p\}$). Если A компактно, то $\Gamma(A) = \Gamma_c(A)$; если A — компактное многообразие с краем, то $\Gamma_c(A \setminus \partial A) \cong \Gamma(A, \partial A)$.

9.3. **Общая теорема об аппроксимации.** Наша главная теорема — аналог двойственности Пуанкаре. Её доказала Макдафф [McD75] при $X = S^0$ и Бодигхаймер в общем случае.

Напоминание: пара (A, A_0) связна, если A_0 задевает каждую компоненту связности.

Теорема 9.6 ([Bod87, Proposition 2]). *Пусть $X \in \mathcal{T}op_*$, а $M_0 \subset M$ — замкнутое подмногообразие гладкого компактного n-мерного многообразия (оба могут быть с краем), причём*

- *X связно либо пара (M, M_0) связна.*

Тогда сканирующее отображение задаёт гомотопическую эквивалентность

$$\gamma : \mathcal{C}(M, M_0; X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(W \setminus M_0, W \setminus M; X) \xrightarrow{\cong} \Gamma(M \setminus M_0, \partial M \setminus M_0; X),$$

где $W^n \supset M$ — многообразие без края (подойдёт M с приклеенным воротником).

Доказательство. Докажем в §9.6. □

(вторая стрелка забывает лишнюю информацию.)

Следствие 9.7. *Пусть M — компактное гладкое многообразие, $X \in \mathcal{T}op_*$.*

- *Если M не имеет замкнутых компонент связности, то $\mathcal{C}(M, \partial M; X) \simeq \Gamma(M; X)$.*
- *Если X связно, то $\mathcal{C}(M, \partial M; X) \simeq \Gamma(M; X)$, $\mathcal{C}(M; X) \simeq \Gamma(M, \partial M; X)$.*
- *Если X связно, то $\mathcal{C}(\operatorname{Int} M; X) \simeq \Gamma_c(\operatorname{Int} M)$.*

Доказательство. (3) сводится к (2): $\mathcal{C}(\operatorname{Int} M; X) \simeq \mathcal{C}(M; X)$, $\Gamma(M, \partial M; X) \cong \Gamma_c(\operatorname{Int} M)$. □

Если M параллелизуемо, то $\widehat{\tau}$ — тривиальное расслоение, поэтому $\Gamma(A, A_0; X) \cong Map((A, A_0), (\Sigma^n X, *))$.

Следствие 9.8. *Пусть M — гладкое паралелизуемое компактное многообразие. Тогда*

- *Если M не имеет замкнутых компонент связности, то $\mathcal{C}(M, \partial M; X) \simeq Map(M, \Sigma^n X)$.*
- *Если X связно, то $\mathcal{C}(M, \partial M; X) \simeq Map(M, \Sigma^n X)$ и $\mathcal{C}(M; X) \simeq Map_*(M/\partial M, \Sigma^n X)$.*

Следствие 9.9. *Пусть $X \in \mathcal{T}op_*$, $n \geq 1$.*

- *$\mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X) \simeq \Sigma^n X$.*
- *Если X связно, то $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \simeq \mathcal{C}(D^n; X) \simeq \Omega^n \Sigma^n X$.*
- *Если X связно, то $\mathcal{C}(S^1; X) \simeq Map(S^1, \Sigma X) =: L\Sigma X$.*

Обратно: пусть K — конечный комплекс, который вложим в $\mathbb{R}^n$. Тогда, для связных X,

$$Map(K, \Sigma^n X) \cong \Gamma(M, \varnothing; X) \simeq \mathcal{C}(M, \partial M; X),$$

где $K \subset M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая окрестность. Аналогично, если $x_0 \in \partial X \subset \mathbb{R}^n$, то

$$Map_*(K, \Sigma^n X) \simeq \mathcal{C}(M, \partial M \setminus E; X),$$

где $E \subset \partial M$ — маленький открытый диск с центром в $x_0' \in \partial M$.

9.4. **Сканирующее отображение.** Пусть $M_0 \subset M^n \subset W^n$ — как раньше. Введём риманову метрику, и пусть ρ — индуцированная функция расстояния. Обозначим $A_\varepsilon := \{p \in W : \ \rho(p, A) < \varepsilon\}$. Найдётся $\varepsilon_0 > 0$ со свойствами:

- геодезическое отображение $T_pW \to W$ — диффеоморфизм из стандартного шара радиуса ε_0 в метрический шар радиуса ε_0;
- $M_0 \subset M_0^{2\varepsilon_0} \subset W$, $M \subset M^{2\varepsilon_0} \subset W$ — трубчатые окрестности.

Теперь введём

$$\mathcal{C}(M, M_0, \varepsilon; X) := \{[p_1, \ldots, p_k; x_1, \ldots, x_k] \in \mathcal{C}(M, M_0; X) : \ \rho(p_i, p_j) \geq 2\varepsilon, \ \forall i \neq j\}$$

и $\mathcal{C}_{\varepsilon_0}(M, M_0; X) := \{(c, \varepsilon) \in \mathcal{C}(M, M_0; X) \times (0, \varepsilon_0] : \ c \in \mathcal{C}(M, M_0, \varepsilon; X)\}$. Точки этого пространства — это конфигурации непересекающихся дисков *одинакового радиуса*, не превосходящего $\leq \varepsilon_0$.

Лемма 9.10. $\operatorname{pr} : \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(M, M_0; X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(M, M_0; X)$, $(c, \varepsilon) \mapsto c$, *— гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. Положим $\mathcal{C}_{[\delta,\varepsilon_0]}(M, M_0; X) := \{(c, \varepsilon) \in \mathcal{C}(M, M_0; X) \times [\delta, \varepsilon_0] : \ c \in \mathcal{C}(M, M_0, \varepsilon; X)\}$. Проекция $\operatorname{pr}_\delta : \mathcal{C}_{[\delta,\varepsilon]}(M, M_0; X) \to \mathcal{C}(M, M_0, \delta; X)$, $(c, \varepsilon) \mapsto c$ — ГЭ (гомотопически обратное — $c \mapsto (c, \delta)$; гомотопия линейно меняет второй радиус).

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{colim}_{n\to\infty} \mathcal{C}_{[1/n,\varepsilon_0]}(M, M_0; X) \arrow[r, "="] \arrow[d, "\operatorname{colim}_{n\to\infty} \operatorname{pr}_{1/n}"] & \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(M, M_0; X) \arrow[d, "p"] \\
\operatorname{colim}_{n\to\infty} \mathcal{C}(M, M_0, 1/n; X) \arrow[r, "="] & \mathcal{C}(M, M_0; X).
\end{tikzcd}$$

Левая стрелка — фильтрованный копредел гомотопических эквивалентностей $\mathrm{pr}_{1/n}$, поэтому это слабая ГЭ[26]. Значит, pr — слабая ГЭ. Но оба пространства гомотопически эквивалентны CW-комплексам, поэтому это настоящая ГЭ. $\square$

Обнаружив добычу, скаты блокируют её диском и отправляют в пасть, передвигая диск над жертвой.

Определение 9.11. Пусть $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. *Сканирующее отображение*

$$\gamma_\varepsilon : \mathcal{C}(M, M_0, \varepsilon; X) \to \Gamma(W \setminus M_0^\varepsilon, W \setminus M^\varepsilon; X)$$

определяется так. Конфигурации $c = [p_1, \dots, p_k; x_1, \dots, x_k] \in \mathcal{C}(M, M_0; X)$ такой, что $\rho(p_i, p_j) \ge 2\varepsilon$, соответствует сечение

$$\gamma_\varepsilon(c) : W \setminus M_0^\varepsilon \to \widehat{T}(W; X), \quad p \mapsto \begin{cases} \infty_p, & \rho(p, p_i) > \varepsilon, \ \forall i; \\ \underbrace{x_i}_{\in X} \wedge \underbrace{(p - p_i)}_{\in T_p W} \cdot \frac{\rho(p, p_i)}{\varepsilon}, & \rho(p, p_i) \le \varepsilon. \end{cases}$$

То есть: если в ε-окрестности точки p нет точек конфигурации — отправляемся на бесконечность; если есть точка — факторизуем окрестность по границе и получаем n-мерную сферу, на которой находится точка с меткой из X; это элемент пространства $S^n \wedge X$.

Эти отображения склеиваются в одно отображение

$$\mathcal{C}(M, M_0; X) \xleftarrow{\simeq} \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(M, M_0; X) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(W \setminus M_0^{\varepsilon_0}, W \setminus M^{\varepsilon_0}; X) \xleftarrow{\simeq} \Gamma(W \setminus M_0, W \setminus M; X),$$

который и фигурирует в теореме об аппроксимации.

Для разогрева рассмотрим случай $(M, M_0) = (D^n, S^{n-1})$ (конфигурации точек в диске, которые умирают при приближении к границе). Обозначим $D_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x|| \le r\}$.

Лемма 9.12. *Сканирующее отображение $\gamma(\varepsilon) : \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, \varepsilon; X) \to \Gamma(D_{1-\varepsilon}; X) \simeq \Sigma^n X$ — гомотопическая эквивалентность при $0 < \varepsilon \le 1$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\varepsilon = 1$, то есть отображение $\gamma_1 : \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, 1; X) \to \Gamma(D_0; X)$. В диск не влезает две частицы на расстоянии ≤ 2, поэтому пространство слева — это пространство конфигураций из ≤ 1 частицы. Справа стоит пространство сечений расслоения над точкой $\{0\}$. Таким образом, γ_1 — гомеоморфизм.

Общий случай: при $t \ge 1$ рассмотрим отображения

$$f_t : \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, \varepsilon; X) \to \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, \varepsilon; X), \quad x \mapsto tx.$$

Это гомотопия между $f_1 = \mathrm{id}$ и f_t; образ f_t содержится в $\mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, t\varepsilon; X)$, поэтому получаем ГЭ $f_t : \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, \varepsilon; X) \to \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, t\varepsilon; X)$. Дальше остаётся рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, \varepsilon; X) \arrow[r, "\gamma_\varepsilon"] \arrow[d, "f_{1/\varepsilon}"', "\simeq"] & \Gamma(D_{1-\varepsilon}; X) \arrow[d, "\sigma \mapsto \sigma(0)"', "\simeq"] \\ \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, 1; X) \arrow[r, "\gamma_1", "\simeq"'] & \Gamma(D_0; X) \cong \Sigma^n X. \end{tikzcd}$$

$\square$

9.5. **Квазирасслоения.**

Определение 9.13. $E \xrightarrow{p} B$ — *квазирасслоение*, если для всякой точки $b \in B$ и всякой $e \in p^{-1}(b)$ верно: $\pi_*(E, p^{-1}(b), e) \to \pi_*(B, b)$ — изоморфизм.

(Эквивалентно: для каждой точки $b \in B$ естественное отображение $p^{-1}(b) \to \mathrm{hofib}_b(E \to B)$ — слабая ГЭ.)

Пример: если $f : X \to Y$ — ГЭ, то $Cyl(f) \to [0, 1]$ — квазирасслоение (но не расслоение Серра).

Скажем, что $p : E \to B$ — квазирасслоение над B_0, если $p^{-1}(B_0) \to B_0$ — квазирасслоение.

Лемма 9.14. *Пусть $p : E \to B$.*

- *Если p — квазирасслоение над U_1, U_2 и $U_1 \cap U_2$, то это квазирасслоение над $U_1 \cup U_2$.*
- *Если $B_1 \subset B_2 \dots$ и $E \to B$ — квазирасслоение над всеми B_k, то это квазирасслоение над $\bigcup_{k \ge 1} B_k$.*

---

[26]Фильтрованные копределы коммутируют с π_* из соображений компактности.

- *Пусть $B' \subset B$ замкнуто, $E' \subset p^{-1}(B')$, и $E' \to B'$ — квазирасслоение. Пусть существуют деформационные ретракции $f_t : B \to B'$, $F_t : E \to E'$ такие, что $p \circ F_t = f_t \circ p$, $\forall t \in [0,1]$. Предположим, что $p^{-1}(b) \to p^{-1}(f_1(b))$ — слабые ГЭ для всех $b \in B$. Тогда $E \to B$ — квазирассл.*

Строгую деформационную ретрацию U на H (то есть $r_t : U \to U$, $r_t|_H = \mathrm{id}_H$, $r_0 = \mathrm{id}_U$, $r_1 : U \xrightarrow{\sim} H$) будем обозначать как $r : U \widetilde{\searrow} H$.

Предложение 9.15. *Пусть $H \subset M$ — n-мерное подмногообразие, причём*

- *X связно или $(H, H \cap M_0)$ связно.*

Тогда имеем квазирасслоение

$$\mathcal{C}(H, H \cap M_0; X) \to \mathcal{C}(M, M_0; X) \xrightarrow{Q} \mathcal{C}(M, H \cup M_0; X).$$

Доказательство. Положим $B := \mathcal{C}(M, H \cup M_0; X)$ и введём фильтрацию

$$B_k := \mathcal{C}_{\leq k}(M, H \cup M_0; X) := \{\text{частицы в } M, \text{ из которых } \leq k \text{ не в } H \cup M_0\}.$$

Доказываем, что Q — квазирасслоение над B_k, индукцией по k.

Шаг индукции: $B_{k+1} \setminus B_k$ — это "ровно $k+1$ нетривиальная частица не в $H \cup M_0$, и сколько угодно частиц в оставшейся части". Возникают гомеоморфизмы

$$\tau_{k+1} : Q^{-1}(B_{k+1} \setminus B_k) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(H, H \cap M_0; X) \times (B_{k+1} \setminus B_k),$$

т.е. над $B_{k+1} \setminus B_k$ квазирасслоение — это тривиальное расслоение. Осталось "склеить" его с квазирасслоением над B_k.

Выберем трубчатую окрестность $H \subset U \subset M$ и деформационную ретракцию $r : U \widetilde{\searrow} H$, которая переводит M_0 в M_0.

А именно, определим $B_k \subset U_k \subset B_{k+1}$,

$$U_k := \{c \in B_{k+1} : \ \geq 1 \text{ частица лежит в } U\}.$$

Тогда точка в $Q^{-1}(U_k \setminus B_k)$ — это "набор частиц в (M, M_0), где ровно k лежат в H и ровно одна в $U \setminus H$". Деф. ретракция $r : U \widetilde{\searrow} H$ "загоняет эту частицу в H" и задаёт согласованные деф. ретракции $U_k \widetilde{\searrow} B_k$ и $Q^{-1}(U_k) \widetilde{\searrow} Q^{-1}(B_k)$. На слоях получаются изоморфизмы: для $c \in U_k$ имеем $\tau_{k+1} : p^{-1}(c) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(H, H \cap M_0; X) \xleftarrow{\cong} p^{-1}(r_1(c)) : \tau_k$. □

9.6. **Схема доказательства теоремы об аппроксимации.** Мы доказываем, что $\gamma : \mathcal{C}(M, M_0; X) \to \Gamma(W \setminus M_0, W \setminus M; X)$ — слабая ГЭ. Рассуждение похоже[27] на доказательство двойственности Пуанкаре: сначала она доказывается в тривиальных случаях, а общий случай постепенно выводится через Майера–Вьеториса. На каждом шаге будет происходить следующее: для некоторых $H \subset M \supset M_0$ мы смотрим на коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(H, H \cap M_0; X) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{C}(M, M_0; X) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{C}(M, H \cup M_0; X) \arrow[d, "\gamma"] \\
\Gamma(W \setminus (H \cap M_0), W \setminus H; X) \arrow[r] & \Gamma(W \setminus M_0, W \setminus M; X) \arrow[r] & \Gamma(W \setminus (H \cup M_0), W \setminus M; X).
\end{tikzcd}$$

Верхняя строка — квазирасслоение (по предложению 9.15), нижняя — расслоение (индуцирована корасслоением, см. задачу 9.5). Две из трёх вертикальных стрелок — слабые ГЭ, поэтому третья — тоже (по 5-лемме для длинных точных последовательностей гомотопических групп).

(1) Случай $(M, M_0) = (D^n, S^{n-1})$ доказали в лемме 9.12.

(2) Случай $(M, M_0) = (D^n, D^k \times S^{n-k-1})$, где X связно или $k < n$: индукция по k. Пусть

$$M := [0,2] \times D^{k-1} \times D^{n-k}, \quad H := [0,1] \times D^{k-1} \times D^{n-k}, \quad M_0 := ([0,2] \times D^{k-1} \times S^{n-k-1}) \cup (\{2\} \times D^{k-1} \times D^{n-k}).$$

Тогда: для левой пары $(H, H \cap M_0) \cong (D^n, D^k \times S^{n-k-1})$ хотим доказать; средняя пара $(M, M_0) \cong (D^n, D^{n-1})$ даёт стягиваемые $\mathcal{C}$ и Γ; правая пара $(M, H \cup M_0)$ после вырезания гомеоморфна $(D^n, D^{k-1} \times S^{n-k})$, это шаг индукции.

(При $k = n$ получаем $(M, M_0) = (D^n, \varnothing)$, что доказывает теорему Мэя–Милгрэма.)

[27]Более того: двойственность Пуанкаре для гладких многообразий можно так и доказывать. Для топологических многообразий рассуждение хитрее, как и доказательство аналогичной теоремы об аппроксимации.

(3) Случай $(M, \partial M)$, где X связно или у M нет замкнутых компонент: индукция *по числу ручек.* (Теория Морса даёт: M можно получить из пустого множества, приклеивая ручки $H = D^k \times D^{n-k}$ по $T = S^{k-1} \times D^{n-k}$. При этом если у M нет замкнутых компонент, то ручек с $k = n$ (приклеиваний диска по всей границе) не случается.) Если $M' = M \cup_T H$, то видим
$$(H, D^k \times S^{n-k-1}) \to (M', \partial(M')) \to (M', H \cup T).$$
Для левой пары доказали в (2); для средней хотим доказать; правая пара после вырезания гомеоморфна $(M, \partial M)$ — это шаг индукции.

(4) Случай $(N \times [0,1], \partial(N) \times [0,1])$: рассматриваем
$$M := N \times [0,2], \quad H := N \times [0,1], \quad M_0 := (\partial N \times [0,2]) \cup (N \times \{2\}).$$
Тогда: $(H, H \cap M_0)$ — хотим доказать; (M, M_0) даёт стягиваемые $\mathcal{C}$ и Γ; $(M, H \cup M_0)$ после вырезания гомеоморфно $(N \times [1,2],\ \partial(N \times [1,2]))$ — а это шаг (3).

(5) Случай (M, M_1), где $M_1 \subset \partial M$ — подмногообразие коразмерности 0: пусть его дополняет $L : \partial M = M_1 \cup L$, $M_1 \cap L = \partial M_0 = \partial L$. Будем считать, что есть воротник $M \supset \partial(M) \times [0,1]$, и рассмотрим корасслоение с
$$H := L \times [0,1], \quad M_0 := M_1 \times [0,1].$$
Тогда $(H, H \cap M_0) = (L \times [0,1], \partial L \times [0,1])$ — случай (4), (M, M_0) после вырезания гомемоморфно (M, M_1), а $(M, H \cup M_0)$ после вырезания гомеоморфно $(M, \partial M)$ — а это случай (3).

(6) Общий случай сводится к (5): надо заменить M_0 на трубчатую окрестность и вырезать её внутренность. □

10. Стабильное расщепление (13 апреля)

По [Bod87] и [Knu18, §7].

В прошлый раз мы доказали: если M — компактное n-мерное многообразие (возможно, с краем), $M_0 \subset M$ — подмногообразие (возможно, с краем), $X \in \mathcal{T}op_*$, и верно: (M, M_0) связно или X связно, то
$$\mathcal{C}(M, M_0; X) \simeq \Gamma(M \setminus M_0,\ \partial M \setminus M_0; X)$$
(справа стоит пространство сечений расслоения над M со слоем $S^n \wedge X$, которое ассоциировано с касательным расслоением.)

10.1. Снэйтовская фильтрация.

На $\mathcal{C}(A, A_0; X)$ есть фильтрация по количеству частиц:
$$\mathcal{C}_{\le k}(A, A_0; X) := \Big(\bigsqcup_{j=0}^{k} \mathrm{Conf}_k(A) \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\times k} \Big) / \sim .$$
Опишем присоединённые градуированные факторы $\mathcal{D}_k(A, A_0; X) := \mathcal{C}_{\le k}(A, A_0; X) / \mathcal{C}_{\le k-1}(A, A_0; X)$. Для этого обозначим
$$\mathrm{Conf}_k(A, A_0) := \mathrm{Conf}_k(A) / \{(x_1, \dots, x_k) \mid \exists i :\ x_i \in A_0\};$$
в частности, $\mathrm{Conf}_k(A, \varnothing) = \mathrm{Conf}_k(A)_+ := \mathrm{Conf}_k(A) \sqcup \mathrm{pt}$, потому что факторизация по пустому подмножеству добавляет точку.

Предложение 10.1. *$\mathcal{D}_k(A, A_0; X) \cong \mathrm{Conf}_k(A, A_0) \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k} := (\mathrm{Conf}_k(A, A_0) \wedge X^{\wedge \mathfrak{S}_k}) / \mathfrak{S}_k$. В частности,*
$$\mathcal{D}(A; X) \cong \mathrm{Conf}_k(A)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k} \cong \frac{\mathrm{Conf}_k(A) \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}}{\mathrm{Conf}_k(A) \times_{\mathfrak{S}_k} *}.$$

Доказательство. Действительно, по определению,
$$\mathcal{D}_k(A, A_0; X) = (\mathrm{Conf}_k(A) \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\times k}) / \{[p_1, \dots, p_k; x_1, \dots, x_k] \mid \exists i :\ p_i \in A_0 \text{ или } x_i = *\} =$$
$$(\mathrm{Conf}_k(A) \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}) / \{[p_1, \dots, p_k; x_1, \dots, x_k] \mid \exists i :\ p_i \in A_0\};$$
факторизация заменяет $\mathrm{Conf}_k(A)$ на $\mathrm{Conf}_k(A, A_0)$. □

Мы докажем, что эта фильтрация *стабильно расщепляется.*

Теорема 10.2 ([Bod87, Proposition 3]). *Пусть $A \supset A_0$ — конечные CW-комплексы, $X \in \mathcal{T}op_*$. Тогда имеем стабильную гомотопическую эквивалентность*

$$\Sigma^\infty \mathcal{C}(A, A_0; X) \simeq \Sigma^\infty \bigvee_{k\geq 1} \mathcal{D}_k(A, A_0; X) = \Sigma^\infty \bigvee_{k\geq 1} \mathrm{Conf}_k(A, A_0) \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}.$$

В частности,

$$\widetilde{H}_*(\mathcal{C}(A, A_0; X); \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{k\geq 1} \widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_k(A, A_0) \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}; \mathbf{k}), \quad \widetilde{H}_*(\mathcal{C}(A; X); \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{k\geq 1} \widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_k(A)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}; \mathbf{k})$$

как модули над алгеброй Стинрода.

Следствие 10.3. *Пусть $X \in \mathcal{T}op_*$ связно. Тогда имеем эквивалентности:*

- *(расщепление Снэйта)*
$$\Sigma^\infty \Omega^n \Sigma^n X \xleftarrow{\sim} \Sigma^\infty \mathcal{C}(D^n; X) \xrightarrow{\sim} \Sigma^\infty \bigvee_{k\geq 1} \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}, \quad 1 \leq n \leq \infty.$$
- *(расщепление Гудвилли)*
$$\Sigma^\infty L\Sigma X \xleftarrow{\sim} \Sigma^\infty \mathcal{C}(S^1; X) \xrightarrow{\sim} \Sigma^\infty \bigvee_{k\geq 1} S^1_+ \wedge_{\mathbb{Z}/k} X^{\wedge k}.$$
- *Если $K \subset \mathbb{R}^n$ — полиэдр и $M \supset K$ — его замкнутая трубчатая окрестность, то*

$$\Sigma^\infty Map(K, \Sigma^n X) \xleftarrow{\sim} \Sigma^\infty \mathcal{C}(M, \partial M; X) \xrightarrow{\sim} \Sigma^\infty \bigvee_{k\geq 1} \mathrm{Conf}_k(M, \partial M) \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k} = \Sigma^\infty (M/\partial M) \wedge X \vee \dots$$

10.2. **Два приложения.** Сначала рассмотрим случай $A = \mathbb{R}^\infty$. Тогда Снэйтовские слагаемые имеют вид

$$\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^\infty; X) \simeq (E\mathfrak{S}_k)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k} \simeq \frac{E\mathfrak{S}_k \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}}{E\mathfrak{S}_k \times_{\mathfrak{S}_k} *},$$

поэтому

$$\widetilde{H}_*(\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; X); \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{k\geq 1} H_*(E\mathfrak{S}_k \times_{\mathfrak{S}_k} X^{\wedge k}, E\mathfrak{S}_k \times_{\mathfrak{S}_k} *; \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_k; \widetilde{H}_*(X^{\wedge k}; \mathbf{k})).$$

При связных X, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; X) \simeq QX := \Omega^\infty \Sigma^\infty X = \mathrm{colim}_n\, \Omega^n \Sigma^n X$

Следствие 10.4. *Пусть X связно, $\mathbb{F}$ — поле. Тогда $H_*(QX; \mathbb{F}) \cong \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_k; \widetilde{H}_*(X; \mathbb{F})^{\otimes k})$.* □

Следствие 10.5. *$f : X \to Y$ — отображение связных пространств такое, что $H_*(X; \mathbb{F}) \to H_*(Y; \mathbb{F})$ сюръективно. Тогда $H_*(QX; \mathbb{F}) \to H_*(QY; \mathbb{F})$ сюръективно. То же для инъекций.*

Доказательство. Для сюръекций: имеем $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F}) \simeq \widetilde{H}_*(Y; \mathbb{F}) \oplus M$, поэтому $\widetilde{H}_*(Y; \mathbb{F})^{\otimes k}$ — прямое слагаемое в $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F})^{\otimes k}$. Значит, то же верно и для гомологий групп. С инъекциями аналогично. □

Вспомним, что $\pi_*(QX) \cong \mathrm{colim}_n\, \pi_{*+n}(\Sigma^n X) = \pi_*^s(X)$.

Предложение 10.6. *Функтор $Q = \Omega^\infty \Sigma^\infty$ переводит корасслоения в гомотопичесие расслоения.*

Доказательство. Из гомотопического вырезания: если $A \to B \to C$ — корасслоение n-связных пространств, то естественное отображение $A \to hofib(B \to C)$ будет $2n$-связным. Поэтому если $X \to Y \to Z$ — любое корасслоение, то $\Omega^n \Sigma^n X \to hofib(\Omega^n \Sigma^n Y \to \Omega^n \Sigma^n Y)$ будет $2n-2$-связно. В пределе получаем эквивалентность. □

Теперь рассмотрим случай $X = S^r$. Имеем

$$\Sigma^\infty \mathcal{C}(A; S^r) \simeq \Sigma^\infty \bigvee_{k\geq 1} \mathcal{D}_k(A; S^r), \quad \mathcal{D}_k(A; S^r) \cong \mathrm{Conf}_k(A)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_k} S^{kr}.$$

Лемма 10.7. *Пусть A — конечный CW-комплекс.*

(1) *Естественная проекция $\pi_{k,r} : \mathrm{Conf}_k(A) \times_{\mathfrak{S}_k} \mathbb{R}^{rk} \to \mathrm{Conf}_k(A) \times_{\mathfrak{S}_k} * = C_k(A)$ — векторное расслоение ранга kr.*

(2) *Если r чётно, то оно ориентируемо.*

(3) $\mathrm{Th}(\pi_{k,r}) \cong \mathcal{D}_k(A; S^r)$.

Набросок доказательства. Это расслоение получается из тривиального векторного расслоения $\mathrm{Conf}_k(A)\times\mathbb{R}^{kr}\to\mathrm{Conf}_k(A)$ факторизацией по $\mathfrak{S}_k$. Определитель действия $\mathfrak{S}_k$ на слоях — r-ая тензорная степень знакового представления, т.е. тривиальное представление при чётных r. Наконец,

$$\mathrm{Th}(\pi_{k,r})=\frac{\mathbb{D}(\pi_{k,r})}{\mathbb{S}(\pi_{k,r})}=\frac{\mathrm{Conf}_k(A)\times_{\mathfrak{S}_k}D^{rk}}{\mathrm{Conf}_k(A)\times_{\mathfrak{S}_k}S^{rk-1}}\cong\mathrm{Conf}_k(A)_+\wedge_{\mathfrak{S}_k}S^{rk}. \qquad \square$$

Следствие 10.8. *Пусть $r\geq 1$, и r чётно либо $\mathrm{char}\,\mathbf{k}=2$. Тогдаи имеем биградуированный изоморфизм $H_*(\mathcal{C}(A;S^r);\mathbf{k})\cong\bigoplus_{k\geq 0}H_{*-kr}(C_k(A);\mathbf{k})$.*

Доказательство. Из стабильного расщепления, леммы 10.7 и изоморфизма Тома:

$$H_*(\mathcal{C}(M;S^r))\cong\bigoplus_{k\geq 0}\widetilde{H}_*(\mathrm{Conf}_k(M)_+\wedge_{\mathfrak{S}_k}S^{kr})\cong\bigoplus_{k\geq 0}\widetilde{H}_*(\mathrm{Th}(\pi_{k,r}))\cong\bigoplus_{k\geq 0}H_{*-kr}(C_k(M)). \qquad \square$$

10.3. **Доказательство стабильного расщепления.** Для краткости обозначим $V_k:=\bigvee_{j=1}^k\mathcal{D}_j(A,A_0;X)$.

Теорема 10.9. *Пусть $1\leq k\leq\infty$, $A\supset A_0$ — конечные CW-комплексы, причём $C_k(A)$ гомеоморфно вкладывается в $\mathbb{R}^{d(k)}$, $d(k)\geq 1$. Пусть $X\in\mathcal{T}op_*$. Тогда определено отображение*

$$\overline{P}_k:\Sigma^{d(k)}\mathcal{C}(A,A_0;X)\to\Sigma^{d(k)}V_k$$

такое, что его ограничение

$$\Sigma^{d(k)}\mathcal{C}_{\leq k}(A,A_0;X)\xrightarrow{\sim}\Sigma^{d(k)}V_k$$

— слабая ГЭ. В частности,

- *После $d(k)$ надстроек, V_k отщепляется от $\mathcal{C}(A,A_0;X)$ прямым слагаемым;*
- *После $d(1)$-надстроек, $\mathcal{D}_1=(A/A_0)\wedge X$ отщепляется прямым слагаемым.*

Выберем вложение

$$\iota_k:\bigsqcup_{j=1}^k C_j(A)\hookrightarrow\mathbb{R}^{d(k)}$$

(При $k=0$ возьмём тривиальное отображение $C_0(A)=\mathrm{pt}=\mathbb{R}^0$).

Схема такая: мы построим сопряжённое отображение

$$P_k:\mathcal{C}(A,A_0;X)\to\mathcal{C}(\bigsqcup_{j\leq k}C_j(A);V_k)\subset\mathcal{C}(\mathbb{R}^{d(k)};V_k)\simeq\Omega^{d(k)}\Sigma^{d(k)}V_\infty$$

— “powerset map”.

Пусть $c\in\mathcal{C}(A,A_0;X)$ — конфигурация точек. Упорядочив их наугад, получаем запись в виде $c=[p_1,\dots,p_\ell;x_1,\dots,x_\ell]$. Для каждого подмножества $I=\{i_1,\dots,i_s\}\subseteq\{1,\dots,\ell\}$, $s\leq k$, у нас возникает подконфигурация

$$c_I:=[p_{i_1},\dots,p_{i_s};x_{i_1},\dots,x_{i_s}]\in\mathcal{C}_{\leq s}(A,A_0;X)\twoheadrightarrow\mathcal{D}_s(A,A_0;X)\hookrightarrow V_k;$$

обозначим её образ как $\widehat{c}_I\in V_k$. С другой стороны, у нас есть подконфигурация без меток

$$p_I:=[p_{i_1},\dots,p_{i_s}]\in C_s(A)\xhookrightarrow{\iota_k}\mathbb{R}^{d(k)};$$

обозначим её образ как $\widehat{p}_I\in\mathbb{R}^{d(k)}$. Теперь рассмотрим элемент

$$P_k([p_1,\dots,p_\ell;c_1,\dots,c_\ell]):=[\dots,\widehat{p}_I,\dots;\dots,\widehat{c}_I,\dots]\in\mathcal{C}_{\leq 2^k}(\mathbb{R}^{d(k)};V_k)\subset\mathcal{C}(\mathbb{R}^{d(k)};V_k);$$

получили отображение

$$P_k:\mathcal{C}_{\leq k}(A,A_0;X)\to\mathcal{C}(\mathbb{R}^{d(k)};V_k)\simeq\Omega^{d(k)}\Sigma^{d(k)}V_k.$$

Например,

$$P_2([p_1,p_2;x_1,x_2]):=\Big[\underbrace{\iota_2([p_1]),\iota_2([p_2])}_{\in C_1(A)\hookrightarrow\mathbb{R}^{d(2)}},\ \underbrace{\iota_2([p_1,p_2])}_{\in C_2(A)\hookrightarrow\mathbb{R}^{d(2)}}\ ;\ \underbrace{[p_1;x_1],\ [p_2;x_2]}_{\in\mathcal{D}_1},\ \underbrace{[p_1,p_2;x_1,x_2]}_{\in\mathcal{D}_2}\Big]\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^{d(2)};\mathcal{D}_1(A,A_0;X)\vee\mathcal{D}_2(A,A_0;$$

Проверим, что оно корректно определено:

- От выбора порядка ответ не зависит: перестановка индексов $1,\dots,k$ переставляет пары $(\widehat{p}_I,\widehat{c}_I)$ между собой.

- Если оказалось, что $x_i = *$ или $p_i \in A_0$, то для всех $I \ni i$ окажется, что $\widehat{c}_I = *$ ($c_I \in \mathcal{C}_{<s}$, так что образ в $\mathcal{D}_s$ зануляется). Значит, выкидывание i-ой частицы из c соответствует выкидыванию I-ых частиц из $P_k(c)$, $\forall I \ni i$.
- Не бывает так, что $\widehat{p}_I = \widehat{p}_J$ (если так оказалось, то $p_I = p_J$, но $p_1, \dots, p_k$ попарно различны)

Если все ι_k согласованы между собой, то и отображения P_k будут согласованы:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(A, A_0; X) \arrow[r, "P_k"] \arrow[d] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^{d(k)}; V_k) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \Omega^{d(k)}\Sigma^{d(k)}V_k \arrow[d] \\
\mathcal{C}(A, A_0; X) \arrow[r, "P_{k+1}"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^{d(k+1)}; V_{k+1}) \arrow[r, "\simeq"] & \Omega^{d(k+1)}\Sigma^{d(k+1)}V_{k+1},
\end{tikzcd}$$

где всё индуцировано вложениями $V_k \subset V_{k+1}$, $\mathbb{R}^{d(k)} \subset \mathbb{R}^{d(k+1)}$.

Доказательство теоремы. Выберем все ι_k согласованно. Докажем индукцией по k, что $\overline{P}_k : \Sigma^{d(k)}\mathcal{C}_{\le k} \to \Sigma^{d(k)}V_k$ — слабая ГЭ. Действительно, из надстроек над $\mathcal{C}_{\le k-1} \to \mathcal{C}_{\le k} \to \mathcal{D}_k$, $V_{k-1} \to V_k \to \mathcal{D}_k$ получаем морфизм корасслоений

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{d(k)}\mathcal{C}_{\le k-1}(A, A_0; X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\Sigma^{d(k)-d(k-1)}\overline{P}_{k-1}"] & \Sigma^{d(k)}\mathcal{C}_{\le k}(A, A_0; X) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{P}_k"] & \Sigma^{d(k)}\mathcal{D}_k(A, A_0; X) \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{d(k)}V_{k-1} \arrow[r] & \Sigma^{d(k)}V_k \arrow[r] & \Sigma^{d(k)}\mathcal{D}_k(A, A_0; X).
\end{tikzcd}$$

По 5-лемме, $\overline{P}_k$ — эквивалентность на гомологиях. Это отображение односвязных пространств, поэтому слабая ГЭ. □

Замечание 10.10. Немного модифицировав конструкцию, можно доказать расщепление Джеймса $\Sigma\mathcal{C}(\mathbb{R}; X) \simeq \Sigma \bigvee_{k\ge1} X^{\wedge k}$, которое для связных X даёт $\Sigma\Omega\Sigma X \simeq \bigvee_{k\ge1} \Sigma X^{\wedge k}$. А именно, на $\mathbb{R}$ есть линейный порядок, поэтому любая точка в $\mathcal{C}(\mathbb{R}; X)$ представима в виде $[p_1, \dots, p_k; x_1, \dots, x_k]$, $p_1 < \dots < p_k$. Поэтому можно игнорировать действие симметрической группы и вместо точки $p_I \in C_k(\mathbb{R})$ с меткой из V_k взять $|I|$ точек в $\mathbb{R}$ с этой меткой. (В итоге $P_k : \mathcal{C}_{\le} k(\mathbb{R}; X) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^{\sqcup 2^k}; V_k) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}; V_k)$.)

10.4. **Приложения к многообразиям.** В оставшееся время я расскажу, как можно вычислять группы $H_*(C_k(M); \mathbb{F})$, где M — компактное многообразие (возможно, с краем), $\mathbb{F}$ — поле, $\beta_i(X) := \dim H_i(X; \mathbb{F})$.

Теорема 10.11 ([BCT89])**.** *Пусть $r \ge 1$. Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$, *или $n + r$ нечётно. Тогда имеем биградуированный изоморфизм*

$$H_*(\mathcal{C}(M; S^r); \mathbb{F}) \cong \bigotimes_{i=0}^{n} H_*(\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-i}; S^{i+r}); \mathbb{F})^{\otimes \beta_i(M)}$$

(вторая градуировка "снэйтовская", т.е. приходит из стабильного расщепления.)

Доказательство. См. §10.5. □

Правая часть: $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-i}; S^{i+r}) \simeq \Omega^{n-i}S^{n+r}$, гомологии можно посчитать через теоремы Коэна. Через левую часть мы умеем выражать гомологии $C_k(M)$: по следствию 10.8, имеем $\widetilde{H}_*(\mathcal{C}(M; S^r); \mathbb{F}) \cong \bigoplus_{k\ge0} H_{*-kr}(C_k(M); \mathbb{F})$. Поэтому мы умеем вычислять $H_*(C_k(M); \mathbb{F})$ для нечётномерных многообразий. Вот что происходит в характеристике 0.

Лемма 10.12. *Пусть $q > n \ge 1$. Тогда $H_*(\Omega^n S^q; \mathbb{Q}) = \operatorname{Sym}(\alpha_{q-n})$ при нечётных q, $H_*(\Omega S^{2k}; \mathbb{Q}) = T(\alpha_{2k-1})$, и $H_*(\Omega^n S^{2k}; \mathbb{Q}) = \operatorname{Sym}(\alpha_{2k-n}, \beta_{4k-n-1})$ при $2k > n \ge 2$.*

Доказательство. Это комбинация Картана–Серра и Милнора–Мура: знаем, что $H_*(\Omega X; \mathbb{Q}) \cong U(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q})$, и $\pi_*(\Omega^n S^q) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{*-n}(S^q) \otimes \mathbb{Q}$. Эти группы известны и образуют тривиальную алгебру Ли во всех случаях, кроме $n = 1$, $q = 2k$. □

Следствие 10.13. *Пусть $r \ge 1$, и $n + r$ нечётно. Тогда имеем биградуированный изоморфизм*

$$H_*(\mathcal{C}(M; S^r); \mathbb{Q}) \cong \operatorname{Sym}(H_{*-r}(M; \mathbb{Q})),$$

где $H_{*-r}(M; \mathbb{Q})$ имеет снэйтовскую градуировку 1.

Доказательство. По теореме об аппроксимации и лемме выше,

$$H_*(\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-i};S^{i+r});\mathbb{Q})\cong H_*(\Omega^{n-i}S^{n+r};\mathbb{Q})\cong \mathrm{Sym}(\alpha_{i+r}).$$

Элемент α_{i+r} имеет снэйтовскую градуировку 1, так как это сферический класс, а $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}^{n-1};S^{i+r})=S^{i+r}$ — представляющая его сфера. Итак, аддитивная образующая из $H_i(M;\mathbb{Q})$ задаёт мультипликативную образующую из $H_{i+r}(\mathcal{C}(M;S^r);\mathbb{Q})$ в снэйтовской градуировке 1. □

Замечание 10.14. При чётных $n+r$ следствие неверно: подставим $M=D^n$, $n\geq 2$. Тогда утверждается, что $H_*(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;S^r);\mathbb{Q})\cong \mathrm{Sym}(\alpha_r)$, но слева стоит $H_*(\Omega^n S^{n+r};\mathbb{Q})\simeq \mathrm{Sym}(\alpha_r,\beta_{n+2r-1})$.

Теорема 10.15. *Пусть M^n — компактное многообразие, и n нечётно. Тогда $H_*(C_k(M);\mathbb{Q})\cong \mathrm{Sym}^k(H_*(M;\mathbb{Q}))$.*

Доказательство. Пусть $r\geq 2$ чётно. По следствию 10.8 и следствию выше, имеем биградуированный изоморфизм

$$\bigoplus_{k\geq 0} H_{*-kr}(C_k(M);\mathbb{Q})\cong \mathrm{Sym}(H_{*-r}(M;\mathbb{Q})).$$

В снэйтовской градуировке k видим $H_{*-kr}(C_k(M);\mathbb{Q})\cong \mathrm{Sym}^k(H_{*-r}(M;\mathbb{Q}))=\mathrm{Sym}^k(H_*(M;\mathbb{Q}))_{*-kr}$. □

Пример: если n нечётно, то $H_*(M;\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\cdot\{x_0,y_n\}$, и $H_*(C_k(S^n);\mathbb{Q})\simeq(\mathbb{Q}[x_0]\otimes\Lambda[y_n])^{(k)}=\mathbb{Q}\cdot\{x_0^k,x_0^{k-1}y_n\}\simeq H_*(S^n;\mathbb{Q})$.

Ещё пример: $M=S^1\times S^2\setminus \mathrm{pt}\simeq S^1\vee S^2$. Тогда $H_*(M;\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\cdot\{x_0,y_1,z_2\}$, так что

$$H_*(\mathcal{C}(M;S^r);\mathbb{Q})\simeq \mathbb{Q}[x_r,z_{r+2}]\otimes\Lambda[y_{r+1}],$$

откуда можно вычислить $\beta_i(C_k(M))$.

10.5. **Доказательство теоремы БКТ.** Из вычислений Коэна следует:

Лемма 10.16. $H_*(\Omega^n S^{n+r};\mathbb{F})\to H_*(Q(S^r);\mathbb{F})$ *инъективно, если $n+r$ чётно или* $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=2$. □

(Мы уже знаем, что при $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$ это изоморфизм. Кстати, если $n+r$ чётно, то это неверно: $H_*(Q(S^r);\mathbb{Q})=\mathrm{Sym}(\mathbb{Q}\cdot\alpha_r)$, $H_*(\Omega^n S^{n+r};\mathbb{Q})=\mathrm{Sym}(\alpha_r,\beta_{2r+n-1})$.)

Теперь к доказательству теоремы. При $r\geq 2$, где $n+r$ нечётно (или $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=2$), мы будем доказывать изоморфизм биградуированных модулей

$$H_*(\mathcal{C}(M;S^r);\mathbb{F})\simeq \bigotimes_{i=0}^{n} H_*(\Omega^{n-i}S^{n+r};\mathbb{F})^{\otimes\beta_i(M)}$$

индукцией по числу ручек. Без ограничения общности, M связно. Кроме того, одновременно с этим мы будем доказывать следующее: powerset-отображение

$$\mathcal{C}(M;S^r)\to\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{D}_1(M;S^r))\simeq\Omega^\infty\Sigma^\infty(M_+\wedge S^r)$$

инъективно на гомологиях.

На каждом шаге мы приклеиваем к связному многообразию M ручку $D^i\times D^{n-i}$, $0<i\leq n$, по вложению

$$\varphi:\partial(D^i)\times D^{n-i}\hookrightarrow\partial M,$$

и получаем новое связное многообразие $\overline{M}:=M\cup_\varphi(D^i\times D^{n-i})$. Гомологии меняются так: поскольку $H_*(\overline{M},M)\cong H_*(D^i\times D^{n-i},\partial(D^i)\times D^{n-i})\cong\widetilde{H}_*(S^i)$, имеем точную последовательность

$$0\to H_i(M)\to H_i(\overline{M})\xrightarrow{p_*}\mathbb{F}\to H_{i-1}(M)\to H_{i-1}(\overline{M})\to 0,$$

и $H_*(M)\cong H_*(\overline{M})$ при $*\neq i,i-1$. Есть два случай:

(I) p_* сюръективно (следовательно, $H_*(M)\to H_*(\overline{M})$ инъективно);

(II) p_* тривиально (следовательно, $H_*(M)\to H_*(\overline{M})$ сюръективно).

По предложению 9.15, для любого связного X есть квазирасслоение

$$\mathcal{C}(M;X)\to\mathcal{C}(\overline{M};X)\to\mathcal{C}(\overline{M},M;X)\simeq\mathcal{C}(D^i\times D^{n-i},\partial(D^i)\times D^{n-i};X),$$

и пространство справа гомотопически эквивалентно

$$\Gamma(\mathring{D}^i\times D^{n-i},\mathring{D}^i\times\partial(D^{n-i-1});X)\simeq Map((D^{n-i},S^{n-i-1}),(\Sigma^n X,*))\cong Map_*(S^{n-i},\Sigma^n X)\simeq\Omega^{n-i}\Sigma^n X.$$

В частности, есть гомотопическое расслоение $\Omega^{n-i+1}S^{n+r} \to \mathcal{C}(M; S^r) \to \mathcal{C}(\overline{M}; S^r) \to \Omega^{n-i}S^{n+r}$. Так как $r \geq 2$, база и тотальное пространство односвязны.

Ещё, по предложению 10.6, у нас есть гомотопическое расслоение

$$Q(M_+ \wedge X) \to Q(\overline{M}_+ \wedge X) \to Q((\overline{M}/M) \wedge X) \simeq Q(\Sigma^i X);$$

получаем морфизм расслоений

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{n-i+1}\Sigma^n X \arrow[r] \arrow[d, "\Omega P_1(\overline{M}, M)"] & \mathcal{C}(M; X) \arrow[r] \arrow[d, "P_1(M)"] & \mathcal{C}(\overline{M}; X) \arrow[r] \arrow[d, "P_1(\overline{M})"] & \Omega^{n-i}\Sigma^n X \arrow[d, "P_1(\overline{M}, M)"] \\
\Omega Q(\Sigma^i X) \arrow[r] & Q(M_+ \wedge X) \arrow[r] & Q(\overline{M}_+ \wedge X) \arrow[r, "p_*"] & Q(\Sigma^i X).
\end{tikzcd}$$

10.5.1. *Первый случай: p_* сюръективно.* Морфизм спектральных последовательностей Серра:

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega^{n-i}S^{n+r}) \otimes H_*(\mathcal{C}(M; S^r)) \arrow[r, Rightarrow, "(i)"] \arrow[d, "f_1 \otimes f_2"] & H_*(\mathcal{C}(\overline{M}; S^r)) \arrow[d, "g"] \\
H_*(Q(S^{i+r})) \otimes H_*(Q(M_+ \wedge S^r)) \arrow[r, Rightarrow, "(i')"] & H_*(Q(\overline{M}_+ \wedge S^r)).
\end{tikzcd}$$

Мы хотим доказать, что (i) вырождается и g инъективно (из первого следует искомое аддитивное описание для гомологий $\mathcal{C}(\overline{M}; S^r)$). Для этого достаточно доказать, что (i') вырождается и f инъективно.

Знаем: $H_*(M) \to H_*(\overline{M})$ инъективно. По следствию 10.5, отображение

$$H_*(Q(M_+ \wedge S^r)) \to H_*(Q(\overline{M}_+ \wedge S^r))$$

инъективно. Это $H_*(F) \to H_*(E)$ в нижнем расслоении. Значит, с.п. (i') вырождается по теореме Лере–Хирша. Далее, f_1 инъективно по лемме 10.16, а f_2 инъективно по предположению индукции. Значит, спектральная последовательность (i) вкладывается в (i'), поэтому (i) вырождается. Отсюда следует, что g инъективно.

10.5.2. *Второй случай: p_* тривиально.*

Лемма 10.17. *Пусть N — связное гладкое многообразие. Тогда $\mathcal{C}(N; S^r)$ $(r-1)$-связно.*

Доказательство. Задача (индукция по числу ручек + гомотопическое расслоение $\mathcal{C}(N; S^r) \to \mathcal{C}(\overline{N}; S^r) \to \mathcal{C}(\overline{N}, N; S^r)$.) □

У нас $r \geq 2$, поэтому $\mathcal{C}(\overline{M}; S^r)$ односвязно. Морфизм с.п. Серра:

$$\begin{tikzcd}
H_*(\mathcal{C}(\overline{M}; S^r)) \otimes H_*(\Omega^{n-i+1}S^{n+r}) \arrow[r, Rightarrow, "(ii)"] \arrow[d, "h_1 \otimes h_2"] & H_*(\mathcal{C}(M; S^r)) \arrow[d, "t"] \\
H_*(Q(\overline{M}_+ \wedge S^r)) \otimes H_*(\Omega Q(S^{i+r})) \arrow[r, Rightarrow, "(ii')"] & H_*(Q(M_+ \wedge S^r)).
\end{tikzcd}$$

Хотим доказать, что (ii) вырождается и h_1 инъективно.

Знаем: $H_*(\Sigma(\overline{M}/M)) \to \widetilde{H}_{*-1}(M)$ инъективно. По следствию 10.5,

$$H_*(\Omega Q(S^{i+r})) \cong H_*(Q(\Sigma(\overline{M}/M) \wedge S^r)) \to H_*(Q(M_+ \wedge S^r))$$

инъективно. Для нижнего расслоения это $H_*(F) \to H_*(E)$, поэтому (ii') вырождается по теореме Лере–Хирша.

Для $H_*(F) \to H_*(E)$ видим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega^{n-i+1}S^{n+r}) \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & H_*(\mathcal{C}(M; S^r)) \arrow[d, "t"] \\
H_*(\Omega Q(S^{i+r})) \arrow[r, hook] & H_*(Q(M_+ \wedge S^r)).
\end{tikzcd}$$

Знаем: h_2 инъективно по лемме 10.16, t инъективно по предположению индукции. Поэтому верхняя стрелка тоже инъективна. Вывод: (ii) тоже вырождается по теореме Лере–Хирша. Значит, горизонтальные стрелки — изоморфизмы, откуда следует, что h_1 инъективно.

11. Групповое пополнение I (20 апреля)

Вспомним: для $X \in \mathcal{T}op_*$,

- На $\Omega^n X$ есть структура $\mathcal{E}_n$-алгебры с отмеченной точкой;
- Есть морфизм $\mathcal{E}_n$-алгебр $\gamma : T_{\mathcal{E}_n}(X) \to \Omega^n\Sigma^n X$ (это морфизм монад $T_{\mathcal{E}_n} \to \Omega^n\Sigma^n$);
- Если X связно, то γ — слабая ГЭ (это теорема об аппроксимации);
- Следовательно, если A — связная $\mathcal{E}_n$-алгебра, то
$$A \simeq \mathrm{Bar}(T_{\mathcal{E}_n}, T_{\mathcal{E}_n}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bar}(\Omega^n\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, A) = \Omega^n \mathrm{Bar}(\Sigma^n, T_{\mathcal{E}_n}, A),$$
т.е. A гомотопически эквивалентна связному n-кратному пространству петель (на монадической бар-конструкции “$\operatorname{hocolim} \Sigma^n T_{\mathcal{E}_n}(T_{\mathcal{E}_n}(\dots T_{\mathcal{E}_n}(A)\dots))$”).

Короче, “с точки зрения теории гомотопий, связные $\mathcal{E}_n$-алгебры — это связные n-кратные пространства петель”. В несвязном случае происходит следующее.

Теорема 11.1. *“$\gamma : T_{\mathcal{E}_n}(X) \to \Omega^n\Sigma^n X$ — это групповое пополнение.” Точнее, $T_{\mathcal{E}_n}(X)$ гомотопически эквивалентно топологическому моноиду $T'_{\mathcal{E}_n}(X)$ такому, что $(T'_{\mathcal{E}_n}(X))^{gr} \simeq \Omega^n\Sigma^n X$.*

Следствие 11.2. *Если A — $\mathcal{E}_n$-алгебра и $\pi_0(A)$ — группа, то A — n-кратное пространство петель. Иначе A гомотопически эквивалентна топологическому моноиду A' такому, что $(A')^{gr}$ — n-кратное пространство петель.*

11.1. **Группообразные H-пространства.**
Напоминание: H-пространство (H, μ, e) — это “унитальная магма в $h\mathcal{T}op$”, то есть пространство с отмеченной точкой и отображением $\mu : H \times H \to H$, $\mu(e, -) \sim \mu(-, e) \sim \mathrm{id} : H \to H$.

Определение 11.3. *H гомотопически ассоциативно*, если отображения $(x, y, z) \mapsto \mu(\mu(x, y), z)$ и $(x, y, z) \mapsto \mu(x, \mu(y, z))$ гомотопны.

H гомотопически коммутативно, если $(x, y) \mapsto \mu(x, y)$ и $(x, y) \mapsto \mu(y, x)$ гомотопны.

Заметим, что $\pi_0(H)$ — унитальная магма. Если H гомотопически ассоциативно, то $\pi_0(H)$ — моноид; если гомотопически коммутативно — коммутативный моноид. То же происходит с гомологиями.

Определение 11.4. *H группообразно*, если для некоторого отображения $\iota : H \to H$ верно: отображения $x \mapsto \mu(\iota(x), x)$ и $x \mapsto \mu(x, \iota(x))$ гомотопны отображению $H \to \{e\} \to H$.

Лемма 11.5. *Пусть H — гомотопически ассоциативное пространство. Тогда: H группообразно $\Leftrightarrow s : H \times H \to H \times H$, $(x, y) \mapsto (x, \mu(x, y))$ — ГЭ.*

Доказательство. Если $t = (t_1, t_2) : H \times H \to H \times H$ гомотопически обратное, то можно взять $\iota(x) := t_2(x, e)$. Обратно, если H группообразно, то можно взять $t(x, y) := (x, \mu(\iota(x), y))$. Детали — задача. □

Лемма 11.6. *Пусть H — гомотопически ассоциативное H-пространство, $x \in H$. Тогда: $\mu(x, -) : H \to H$ — ГЭ $\Leftrightarrow$ элемент $[x] \in \pi_0(H)$ обратим.*

Доказательство. Пусть $\beta = [x] \in \pi_0(H)$. Выберем представителя $\beta^{-1} = [y]$ и докажем, что $\mu(y, -)$ гомотопически обратно к $\mu(x, -)$. Действительно: $\mu(x, \mu(y, -)) : H \to H$ гомотопно отображению $\mu(\mu(x, y), -) : H \to H$. Это умножение на элемент из связной компоненты единицы. Оно гомотопно отображению $\mu(e, -)$, а оно гомотопно тождественному. □

Предложение 11.7. *Пусть CW-комплекс H — гомотопически ассоциативное H-пространство. Тогда: H группообразно тогда и только тогда, когда $\pi_0(H)$ — группа.*

Доказательство. Ясно, что это условие необходимо.

Докажем, что связное H-пространство группообразно. Имеем гомоморфизм групп $\mu_* : \pi_n(H) \times \pi_n(H) \to \pi_n(H)$. При этом $\mu_*(x, 0) = x = \mu_*(0, x)$, поэтому $\mu_*(x, y) = x + y$ — обычное сложение в $\pi_n(H)$. (При $n = 1$ заодно получаем, что эта группа абелева.)

Теперь докажем, что $s : (x, y) \mapsto (x, xy)$ — слабая ГЭ. Ясно, что $s_* : \pi_n(H) \times \pi_n(H) \to \pi_n(H) \times \pi_n(H)$ действует по формуле $(a, b) \mapsto (a, a + b)$. Это изоморфизм при всех $n \geq 1$ — значит, s — слабая ГЭ.

Общий случай: Пусть H_α — компонента связности, соответствующая элементу $\alpha \in \pi_0(X)$; мы хотим доказать, что
$$s : H_\alpha \times H_\beta \to H_\alpha \times H_{\alpha\beta}, \quad (x, y) \mapsto (x, xy)$$

— ГЭ. Достаточно доказать, что $(ax, yb) \mapsto (ax, axyb)$ — ГЭ для всех $x, y \in H_{[e]}$, поэтому задача сводится к случаю $H = H_e$, а её мы решили выше. (Задача: дополнить аргумент.) $\square$

В частности: если M — топологический моноид и $\pi_0(M)$ — группа, то он группообразный (и можно надеяться, что M "гомотопически эквивалентен группе"). На самом деле так и есть.

11.2. **Классифицирующее пространство топологического моноида.** Дискретный моноид — это категория с одним объектом, поэтому проще начать с категорий.

Определение 11.8. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория. Её *нерв* $N_\bullet\mathcal{C}$ — это следующее симплициальное множество: $N_k\mathcal{C}$ — это множество цепочек морфизмов, у которых можно взять композицию,

$$N_k\mathcal{C} := \{X_0 \xrightarrow{f_0} \dots \xrightarrow{f_k} X_k\} = \{(X_0, f_0, X_1, f_1, \dots, f_{k-1}, X_k) : \ X_i \in \mathcal{C}, \ f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_{i+1})\};$$

вырождения добавляют тождественный морфизм, а грани соответствуют композициям:

$$s_i(\dots \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} \dots) := (\dots \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{X_i}} X_i \xrightarrow{f_i} \dots),$$
$$d_i(\dots \to X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \to \dots) := (\dots \to X_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} X_{i+1} \to \dots).$$

Классифицирующее пространство категории $\mathcal{C}$ — это геометрическая реализация её нерва, то есть CW-комплекс

$$B\mathcal{C} := |N_\bullet\mathcal{C}| = \Big(\bigsqcup_{X_0 \to \dots \to X_k \in N_k\mathcal{C}} \Delta^k\Big)/\sim$$

(склеенный из симплексов, которые соответствуют цепочкам морфизмов в $\mathcal{C}$: если в цепочке морфизмов есть тождественный, то этот симплекс приклеивается к соответствующему симплексу на размерность 1 меньше; грани симплекса приклеиваются к симплексам, которые соответствуют композициям.)

Начало конструкции такое: вершины — это объекты категории; для каждого морфизма $X \to Y$ вклеивается отрезок, их соединяющий (при этом отрезок, соответствующий тождественному морфизму, отождествляется с точкой, поэтому 1-клетки соответствуют только нетождественным морфизмам); для каждой цепочки $X \to Y \to Z$ вклеивается треугольник, грани которого — это $X \to Y$, $Y \to Z$ и $X \to Z$ (поэтому 2-клетки соответствуют цепочкам из двух нетождественных морфизмов), и так далее.

Определение 11.9. Классифицирующее пространство дискретного моноида — это классифицирующее пространство соответствующей категории из одного объекта. По построению,

$$BM = \Big(\bigsqcup_{f_1, \dots, f_k \in M} \Delta^k\Big)/\sim \ \cong \Big(\bigsqcup_{k \geq 0} \Delta^k \times M^{\times k}\Big)/\sim.$$

В эту конструкцию можно добавить топологию (что соответствует замене обычных категорий на топологические). Вот результат для моноидов:

Определение 11.10. Пусть M — топологический моноид. Его *классифицирующее пространство* — это геометрическая реализация симплициального пространства $B_\bullet M$, $B_k M := M^{\times k} \in \mathcal{T}op$, где отображения граней и вырождения — это $(m_0, \dots, m_i, 1, m_{i+1}, \dots, m_k)$ и

$$s_i(m_1, \dots, m_k) := (m_1, \dots, m_i, 1, m_{i+1}, \dots, m_k), \quad d_i(m_1, \dots, m_k) := \begin{cases} (m_2, \dots, m_k), & i = 0; \\ (m_1, \dots, m_i \cdot m_{i+1}, \dots, m_k), & 1 \leq i \leq k-1; \\ (m_1, \dots, m_{k-1}), & i = k. \end{cases}$$

Более явно: отождествим стандартный симплекс с $\Delta^k = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1\}$; тогда

$$BM = \Big(\bigsqcup_{k \geq 1} M^{\times k} \times \Delta^k\Big)/\sim, \quad (x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) \sim (x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_k; t_1, \dots, t_i, t, t_{i+1}, \dots, t_k), \ t_i \leq t \leq t_{i+1};$$
$$(x_1, \dots, x_k; 0, t_2, \dots, t_k) \sim (x_2, \dots, x_k; t_2, \dots, t_k);$$
$$(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k; t_1, \dots, t, t, \dots, t_k) \sim (x_1, \dots, x_i \cdot x_{i+1}, \dots, x_k; t_1, \dots, t, \dots, t_k)$$
$$(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_{k-1}, 1) \sim (x_1, \dots, x_{k-1}; t_1, \dots, t_{k-1}).$$

Это должно вам кое-что напомнить.

Определение 11.11. Пусть $A \supset A_0$ — пара топологических пространств, M — коммутативный топологический моноид. *Конфигурационное пространство точек с метками в моноиде*:

$$\mathcal{C}(A, A_0; M) := \Big(\bigsqcup_{k\geq 1} A^{\times k} \times_{\mathfrak{S}_k} M^{\times k}\Big)/\sim, \quad \text{где}$$

$$[p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_k; m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_k] \sim [p_1, \ldots, \widehat{p}_i, \ldots, p_k; m_1, \ldots, \widehat{m}_i, \ldots, m_k], \quad p_i \in A_0;$$

$$[p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_k; m_1, \ldots, 1, \ldots, m_k] \sim [p_1, \ldots, \widehat{p}_i, \ldots, p_k; m_1, \ldots, \widehat{1}, \ldots, m_k];$$

$$[p_1, \ldots, p, p, \ldots, p_k; m_1, \ldots, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_k] \sim [p_1, \ldots, p, \ldots, p_k; m_1, \ldots, m_i \cdot m_{i+1}, \ldots, m_k].$$

Коммутативность нужна, потому что неясно, в каком порядке перемножать точки. Но порядок возникает, если точки расположены на прямой. Для $A \subset \mathbb{R}$ обозначим

$$A^k_{ord} := \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^{\times k} : \ a_1 \leq \cdots \leq a_k\}.$$

Определение 11.12. Пусть $A_0 \subset A \subset \mathbb{R}$ и M — топологический моноид. Положим

$$\mathcal{C}(A, A_0; M) := \Big(\bigsqcup_{k\geq 1} A^k_{ord} \times M^{\times k}\Big)/\sim,$$

где соотношения — как выше.

Предложение 11.13. *Для любого топологического моноида, $BM \cong \mathcal{C}(I, \partial I; M)$.*

Доказательство. По построению, $\mathcal{C}(I, \partial I; M) \cong \Big(\bigsqcup_{k\geq 1} \Delta^k \times M^{\times k}\Big)/\sim$, и соотношения совпадают с симплициальными. □

11.3. **Квазирасслоение.** В случае $M = G$ получится в точности классифицирующее пространство для группы G. Более точно, получится расслоение $G \to EG \to BG$, которое классифицирует главные G-расслоения, и гомотопическая эквивалентность $\Omega BG \simeq G$.

Предложение 11.14. *Пусть M — топологический моноид.*

- *Пространство $EM := \mathcal{C}(I, \{1\}; M)$ стягиваемо.*
- *Если $\pi_0(M)$ — группа, то $M \to EM \to BM$ — квазирасслоение.*

Доказательство. Стягивающая гомотопия: $f_t : \mathcal{C}(I, \{1\}; M) \to \mathcal{C}(I, \{1\}; M)$, $f_t([p_1, \ldots, p_k; m_1, \ldots, m_k]) := [p_1 + t, \ldots, p_k + 1; m_1, \ldots, m_k]$.

Квазирасслоение у нас такое: $M = \mathcal{C}(\{0\}; M) \to \mathcal{C}(I, \{1\}; M) \xrightarrow{p} \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; M)$. Дальше рассуждаем как в предложении 9.15. А именно, мы рассматриваем замкнутые подмножества $B_k := \mathcal{C}_{\leq k}(I, \partial I; M)$ и их окрестности

$$U_k := \{c \in \mathcal{C}_{\leq (k+1)}(I, \partial I; M) : \ \text{из этих частиц} \geq 1 \text{ лежит в } [0; 1/2) \subset I\}.$$

Конфигурация из $B_{k+1} \setminus B_k$ — это ровно $k+1$ нетривиальная частица в $(0, 1)$, поэтому $p^{-1}(B_{k+1} \setminus B_k) \cong M \times (B_{k+1} \setminus B_k)$ (добавляем частицу в точке $\{0\}$ с меткой из M.)

Деформационная ретракция $U_k \searrow B_k$ (которая каждую точку из $[0, 1/2)$ линейно двигает в 0) накрывается ретракцией $p^{-1}(U_k) \searrow p^{-1}(B_k)$; на слоях происходит следующее: если $c \in U_k$ — конфигурация из $\leq k+1$ частицы в $(0; 1)$, где ≥ 1 лежит в $[0; 1/2)$, то $p^{-1}(c)$ — это все конфигурации в $[0; 1)$, где можно добавить к ним частицу в точке $\{0\}$.

После деформационной ретракции всё, что лежало в отрезке $[0, 1/2)$ сдвинулось в ноль. На слое при этом частицы перемножились, поэтому индуцированное отображение $p^{-1}(c)$ в себя — это отображение вида $x \cdot (-) : M \to M$. По лемме 11.6, это ГЭ. □

Следствие 11.15. *Если M — группообразный топологический моноид, то $M \simeq \Omega BM$.*

Доказательство. $M \to \mathrm{pt} \to BM$ — гомотопическое расслоение. □

Заметим, что всегда есть отображение $\gamma_M : M \to \Omega BM$, которое индуцировано вложением $\Sigma M = B_1 M \subset BM$. Это ГЭ тогда и только тогда, когда M группообразный.

Определение 11.16. *Групповым пополнением* топологического моноида M будем называть отображение $\gamma_M : M \to \Omega BM$. а

Также будем писать $M^{gr} := \Omega BM$. У него есть “универсальное свойство”: если $f : M \to N$ — отображение в группообразный топологический моноид, то оно “продолжается до $\Omega BM \xrightarrow{\Omega Bf} \Omega BN \xleftarrow{\sim} N$ гомотопически единственным образом”. Мы не будем придавать этому строгий смысл.

Предложение 11.17. *Пусть M — топологический моноид. Тогда $\pi_0(\Omega BM) \cong \pi_0(M)^{gr}$ — групповое пополнение в обычном смысле, т.е. $\pi_0(M) \to \pi_0(\Omega BM)$ — универсальный гомоморфизм из моноида в группу.*

Набросок доказательства. Это получается внимательным рассматриванием группы $\pi_1(BM)$ (она порождена элементами моноида по модулю соотношений $m_1 \cdot m_2 = m_1 m_2$.) □

Предложение 11.18. *Пусть M — коммутативный топологический моноид. Тогда M^{gr} — бесконечнократное пространство петель.*

Доказательство. Так как M коммутативен, на $BM = \mathcal{C}(I, \partial I; M)$ возникает индуцированное умножение (поточечное). Значит, определены топологические моноиды $B^k M$, $k \geq 0$. При этом BM связно, поэтому $B^k M$ тоже связны и, следовательно, группообразны. Получаем:

$$BM \simeq (BM)^{gr} = \Omega B^2 M \simeq \Omega(B^2 M)^{gr} = \Omega^2 B^3 M \cdots \simeq \Omega^k B^{k+1} M;$$

таким образом, $M^{gr} \simeq \Omega^k B^k M$ при всех $k \geq 1$. □

11.4. **Алгебраическая K-теория.** В первом приближении, *алгебраическая K-теория по Сигалу* строится так:

- Пусть $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ — малая моноидальная категория. Возникает отображение $B(\otimes) : B(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cong B\mathcal{C} \times B\mathcal{C} \to B\mathcal{C}$; таким образом, $B\mathcal{C}$ — топологический моноид.
- Если рассматривать все объекты и только изоморфизмы, $i\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$, все равно получится моноид $B(i\mathcal{C})$.
- Введём группообразный моноид $K(\mathcal{C}) := (Bi\mathcal{C})^{gr} = \Omega B(Bi\mathcal{C})$.
- Положим $K_i(\mathcal{C}) := \pi_i(K(\mathcal{C}))$.
- Наконец, для ассоциативного кольца R определим $K_i(R) := K_i(\mathcal{P}_R)$, где $\mathcal{P}_R$ — категория конечнопорождённых проективных R-модулей (относительно $\oplus$).

Если понимать буквально, эта конструкция не работает. Точнее, $B\mathcal{C}$ — моноид только для *строгих* моноидальных категорий: таких, что $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$, $A \otimes I = A = I \otimes A$ равны как элементы множества $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$. В общем случае эти объекты всего лишь изоморфны: их связывает ассоциатор и униторы

$$\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes C), \quad \lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\sim} A \xleftarrow{\sim} A \otimes I : \rho_A,$$

причём $(\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha : A \otimes (I \otimes B) \to (A \otimes I) \otimes B \to A \otimes B$ совпадает с $\mathrm{id} \otimes \lambda$, и выполнено тождество пятиугольника.

Для $\mathcal{P}_R$ ситуацию можно починить так: она эквивалентна категории, объекты в которой — это пары (n, i), где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $i \in Mat_{n \times n}(R)$ — идемпотентная матрица, а морфизмы — это морфизмы соответствующих R-модулей $\mathrm{Im}(i) \subset R^n$. Эта категория уже строгая симметрическая моноидальная.

Теорема 11.19.
- *Если $\mathcal{C}$ строго моноидальная, то $B\mathcal{C}$ — моноид.*
- *Если $\mathcal{C}$ строго симм. моноидальная, то $B\mathcal{C}$ — коммутативный моноид.*
- *Если $\mathcal{C}$ моноидальная, то $B\mathcal{C}$ — $\mathcal{E}_1$-алгебра.*
- *Если $\mathcal{C}$ ленточная (braided monoidal), то $B\mathcal{C}$ — E_2-алгебра (Fiedorowicz).*
- *Если $\mathcal{C}$ симметрическая моноидальная, то $B\mathcal{C}$ — E_∞-алгебра.* □

Следствие 11.20. *Если $\mathcal{C}$ симм.моноидальная / ленточная / моноидальная, то $K(\mathcal{C})$ — бесконечнократное / двукратное / однократное пространство петель.*

Группа $K_0(R) = \pi_0(B\mathcal{P}_R)^{gr}$ получается конструкцией Гротендика из моноида классов эквивалентности к.п. проективных модулей относительно прямой суммы.

11.5. **Аппроксимация в несвязном случае.** Обозначение: для $c = [p_1, \dots, p_k; x_1, \dots, x_k] \in \mathcal{C}(A; X)$ обозначим $\mathrm{supp}(c) := \{p_i : x_i \neq *\} \subset A$.

Определение 11.21. Для $X \in \mathcal{T}op_*$ и $n \geq 1$ введём моноид

$$\mathcal{C}'_n(X) := \{(c, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \times \mathbb{R}_{>0} : \quad \mathrm{supp}(c) \subset (0, t) \times \mathbb{R}^{n-1}\},$$

где операция индуцирована конкатенацией $(0, t_1) \sqcup (0, t_2) \hookrightarrow (0, t_1 + t_2)$.

Лемма 11.22. $\mathcal{C}'_n(X) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X)$ *— слабая ГЭ.*

Доказательство. Упражнение (аналогично рассуждению с $\mathcal{C}_\varepsilon(A, A_0; X)$.) □

Постаравшись чуть побольше, можно убедиться, что $\mathcal{C}'_n(X)$ и $T_{\mathcal{E}_n}(X)$ гомотопически эквивалентны как H-пространства. Сигал доказал следующий результат.

Теорема 11.23 ([Seg73, Theorem 3])**.** *При $n \geq 1$, $B(\mathcal{C}'_n(X)) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}; \Sigma X)$.*

Доказательство. Возможно, обсудим в следующей лекции. □

Теорема 11.24 ([Seg73])**.** *$B(\mathcal{C}'_n(X)) \simeq \Omega^{n-1}\Sigma^n X$. Таким образом, сканирующее отображение $\mathcal{C}'(\mathbb{R}^n; X) \to \Omega^n \Sigma^n X$ — это групповое пополнение.*

Доказательство. Так как ΣX связно, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}; \Sigma X)$ тоже связно, поэтому моноид $\mathcal{C}'_{n-1}(\Sigma X)$ связный (значит, группообразный). Значит, $\mathcal{C}'_{n-1}(\Sigma X) \simeq \Omega B(\mathcal{C}'_{n-1}(\Sigma X))$. По теореме выше, $B(\mathcal{C}'_{n-1}(\Sigma X)) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-2}; \Sigma^2 X)$. Это пространство гомотопически эквивалентно $\mathcal{C}'_{n-2}(\Sigma^2 X)$. Итерируя, получаем $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}; \Sigma X) \simeq \Omega^{n-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^0; \Sigma^n X) = \Omega^{n-1}\Sigma^n X$. □

Следствие 11.25.
- *$T_{\mathcal{E}_n}(X) \to \Omega^n \Sigma^n X$ — это групповое пополнение.*
- *Если A — $\mathcal{E}_n$-алгебра, то A^{gr} — n-кратное пространство петель.*

Доказательство. Первая часть ясна из гомотопической эквивалентности $T_{\mathcal{E}_n}(X) \simeq \mathcal{C}'_n(X)$. Вторая часть: получаем морфизм $T_{\mathcal{E}_n}$-модулей $\Omega B T_{\mathcal{E}_n} \to \Omega B \Omega^n \Sigma^n \simeq \Omega^n \Sigma^n$ (сократили $B\Omega(\Omega^{n-1}\Sigma^n X) \simeq \Omega^{n-1}\Sigma^n X$), и дальше рассуждаем как раньше. □

Следствие 11.26.
(1) *$J(X)^{gr} \simeq \Omega\Sigma X$.*
(2) *$T_{\mathcal{E}_n}(S^0) = \bigsqcup_{k \geq 0} C_k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^n S^n$ — это групповое пополнение. В частности,*

$$\Big(\bigsqcup_{k \geq 0} B(\mathrm{Br}_k)\Big)^{gr} \simeq \Omega^2 S^2, \quad \Big(\bigsqcup_{k \geq 0} B\mathfrak{S}_k\Big)^{gr} \simeq Q(S^0) = \text{“}\Omega^\infty S^\infty\text{”}.$$

11.6. **Гомологии группового пополнения.** Пусть M — топологический моноид. Тогда $H_*(M)$ — кольцо, и $\pi_0(M) \subset H_*(M)$. Отображение колец $H_*(M) \to H_*(\Omega B M)$ описывается теоремой МакДафф–Сигала о групповом пополнении.

Теорема 11.27 ([McDS76])**.** *Пусть $\pi_0(M) \subset H_*(M)$ лежит в центре. Тогда*

$$H_*(\Omega B M) \cong H_*(M)[1/\pi_0(M)],$$

где справа стоит локализация в мультипликативном подмножестве. □

Это “логично”: морфизм обращает $\pi_0(M)$, и тождественный, если $\pi_0(M)$ уже обратимо.

Доказательство основано на интересной конструкции. Так как гомологии коммутируют с прямыми пределами, можно считать, что моноид $\pi_0(M)$ не более, чем счётный (он представляется в виде объединения таких; соответственно, M представляется в виде объединения подмоноидов с таким условием на π_0). Выберем последовательность $x_1, x_2, \dots \in M$, которая задевает каждую компоненту связности бесконечно много раз, и рассмотрим телескоп

$$M_\infty := \mathrm{hocolim}(M \xrightarrow{\cdot x_1} M \xrightarrow{\cdot x_2} \dots\dots).$$

По построению, $H_*(M_\infty; \mathbb{Z}) \cong H_*(M; \mathbb{Z})[1/\pi_0(M)]$, и индуцированное отображение $H_*(M) \to H_*(M_\infty)$ — это искомая локализация. МакДафф и Сигал построили гомологическую эквивалентность $M_\infty \to \Omega B M$; таким образом, получается диаграмма

$$H_*(M) \to H_*(M)[1/\pi_0(M)] \cong H_*(M_\infty) \xrightarrow{\simeq} H_*(\Omega B M).$$

Идейно: $M \to M_\infty$ — это “наивный способ убрать π_0”, а $M \to \Omega B M$ — это честное групповое пополнение. Оказывается, если нас интересуют только гомологии, то “наивное пополнение” уже даёт правильный ответ.

Предложение 11.28. *Определены отображения*

$$\mathbb{Z} \times B\mathfrak{S}_\infty \to \Omega^\infty S^\infty, \quad \mathbb{Z} \times B(\mathrm{Br}_\infty) \to \Omega^2 S^2,$$

индуцирующие изоморфизм на гомологиях.

Доказательство. Для $M = T_{\mathcal{E}_\infty}(S^0) \simeq \bigsqcup_{k \geq 1} B\mathfrak{S}_k$ имеем $\pi_0(M) \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}$, поэтому M_∞ получается как телескоп отображения $M \to M$, $B\mathfrak{S}_k \to B\mathfrak{S}_{k+1}$. Нетрудно видеть, что $M_\infty \cong \mathbb{Z} \times B\mathfrak{S}_\infty$. Наконец, $\Omega BM \simeq Q(S^0)$ по теореме выше. Случай $\mathcal{E}_2$ аналогичен. □

12. Групповое пополнение II (27 апреля)

12.1. **Доказательство теоремы о групповом пополнении.** Для простоты пусть M — гомотопически коммутативный топологический моноид, и $\pi_0(M)$ счётно.

Напоминание: мы выбрали $x_1, x_2, \dots \in M$, которая задевает каждую компоненту связности бесконечно много раз, и определили

$$M_\infty := \mathrm{hocolim}(M \xrightarrow{\cdot x_1} M \xrightarrow{\cdot x_2} \dots).$$

Лемма 12.1.
- $H_*(M_\infty; \mathbf{k}) \cong H_*(M; \mathbf{k})[1/\pi_0(M)]$.
- *Для любого $x \in M$ отображение $(-) \cdot x : M_\infty \to M_\infty$ индуцирует изоморфизм на гомологиях.*

Доказательство. Задача. □

Замечание 12.2. В [RW13] Рэндал-Уильямс доказал, что оно даже индуцирует изоморфизм на гомологиях с коэффициентами в любой *абелевой*[28] локальной системе.

Напоминание: если $\pi_0(M)$ — группа, то $M \to EM \to BM$ — квазирасслоение, поэтому для любого $M \curvearrowright X$ возникает гомотопическое расслоение $X \to EM \times_M X \xrightarrow{p} BM$. Это условие можно немного ослабить.

Предложение 12.3. *Пусть $M \curvearrowright X$ — действие топологического моноида. Пусть для любого $m \in M$ верно: $m \cdot (-) : X \to X$ — слабая ГЭ.*

Тогда $X \to EM \times_M X \xrightarrow{p} BM$ — квазирасслоение. В частности, $X \to \mathrm{hofib}(p)$ — тоже ГЭ.

Доказательство. Аргумент как с квазирасслоением $M \to EM \to BM$: пространство $EM \times_M X$ получается из $\mathcal{C}([0,1], \{0\}; M)$ так: считаем, что в точке 1 находится частица с меткой из X; если в неё влетает частица с меткой из M — перемножаем. Дальше, как раньше, доказываем утверждение индукцией по фильтрации через деформационные ретракции. Отображение сравнения слоёв — это в точности "домножение X слева на несколько элементов из M". □

Предложение 12.4. *Пусть $M \curvearrowright X$ — действие топологического моноида. Рассмотрим $X \to EM \times_M X \xrightarrow{p} BM$.*

Пусть для любого $m \in M$ верно: $m \cdot (-) : X \to X$ индуцирует изоморфизм на гомологиях. Тогда $H_*(X) \to H_*(\mathrm{hofib}(p))$ — изоморфизм.

Набросок доказательства. То же рассуждение, что и выше. Надо только доказать, что условие "$H_*(F) \cong H_*(\mathrm{hofib}(p))$" похоже на условие квазирасслоения, т.е. сохраняется при тех же операциях (при склейке, при предельном переходе, при деформационных ретракциях, которые индуцируют изоморфизмы на гомологиях слоёв). □

Замечание 12.5. Аналогичное утверждение верно для гомологий с локальными коэффициентами и для гомологий с абелевыми локальными коэффициентами. См. [ERW18, Theorem 6.5] (там используется другой формализм, но итоги те же).

Теорема 12.6 (Теорема о групповом пополнении)**.** *Пусть M — гомотопически коммутативный топологический моноид, и $\pi_0(M)$ счётно. Рассмотрим отображения $M \xrightarrow{i} M_\infty$,*

$$M_\infty \to EM \times_M M_\infty \xrightarrow{p} BM, \quad M_\infty \xrightarrow{s} \mathrm{hofib}(p).$$

Тогда

(1) $H_*(M_\infty) \cong H_*(M)[1/\pi_0(M)]$;

[28] локальная система абелева, если соответствующее представление $\pi_1(X) \to End(A)$ пропускается через $\pi_1(X)_{ab}$.

(2) $s_* : H_*(M_\infty) \to H_*(\mathrm{hofib}(p))$ *— изоморфизм;*
(3) $EM \times_M M_\infty$ *стягиваемо (таким образом,* $j : \Omega BM \to \mathrm{hofib}(p)$ *— гомотопическая эквивалентность).*

Итог:

$$H_*(M)[1/\pi_0(M)] \xrightarrow[\simeq]{i_*} H_*(M_\infty) \xrightarrow[\simeq]{s_*} H_*(\mathrm{hofib}(p)) \xleftarrow[\simeq]{j_*} H_*(\Omega BM).$$

Доказательство. (1) верно по лемме 12.1. Предложение 12.4 применимо к $X = M_\infty$ по лемме 12.1, что доказывает (2). Наконец, (3) доказывается так:

$$\begin{aligned} EM \times_M M_\infty = EM \times_M \mathrm{hocolim}(M \to M \to \dots) &= \mathrm{hocolim}(EM \times_M M \to EM \times_M M \to \dots) \\ &= \mathrm{hocolim}(EM \to EM \to \dots) \simeq \mathrm{hocolim}(\mathrm{pt} \to \mathrm{pt} \to \dots) \simeq \mathrm{pt}. \end{aligned}$$ □

Определение 12.7. Отображение $f : E \to B$ *ациклично*, если $\widetilde{H}_*(\mathrm{hofib}_b(f); \mathbb{Z}) = 0$ для любой точки $b \in B$. (Эквивалентно, f индуцирует изоморфизм на гомологиях с любыми локальными коэффициентами.)

Теорема 12.8 ([RW13])**.** *В условиях теоремы, отображение* $M_\infty \to \mathrm{hofib}(p) \simeq \Omega BM$ *ациклично.*

Набросок доказательства. Примерно те же аргументы, но для гомологий с коэффициентами в абелевых локальных системах. □

12.2. **Связь с плюс-конструкцией.**

Определение 12.9. Группа G *совершенна*, если $G = (G, G)$ (то есть, если $G_{ab} = 0$.)

Например, если пространство F ациклично, то $\pi_1(F)_{ab} = H_1(F; \mathbb{Z}) = 0$, поэтому $\pi_1(F)$ совершенна.

Лемма 12.10. *Если* $X \to Y$ *ациклично, то (на каждой компоненте связности имеем)* $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/P$*, где* $P \triangleleft \pi_1(X)$ *совершенна.*

Доказательство. Задача. □

Предложение 12.11. *Определён* совершенный радикал $P_G \triangleleft G$ *— наибольшая нормальная совершенная подгруппа.*

Доказательство. Задача (надо взять нормальное замыкание объединения всех нормальных совершенных подгрупп и проверить, что получится совершенная подгруппа). □

Определение 12.12. Пусть X связно, $P \triangleleft \pi_1(X)$ — совершенная нормальная подгруппа. Отображение $f : X \to Y$ — *плюс-конструкция* относительно P, если f ациклично и $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/P$.

Обозначение: $Y = X_P^+$. Также обозначаем $X^+ := X^+_{P_{\pi_1(X)}}$. Если X несвязно — плюс-конструкцию применяем покомпонентно.

Замечание 12.13. По лемме 12.10, любое ацикличное отображение является плюс-конструкцией относительно $\mathrm{Ker}(\pi_1(X) \to \pi_1(Y))$. Про X^+ надо думать как про “финальное пространство с такими же гомологиями, как у X”: сильнее уменьшить фундаментальную группу все равно не получится.

Теорема 12.14 (Квиллен)**.** *Пусть* $P \triangleleft \pi_1(X)$ *совершенна.*

- X_P^+ *существует (и получается из* X *приклеиванием клеток размерности* $2, 3$*).*
- *Любые две плюс-конструкции гомотопически эквивалентны.* □

Заметим: если P совершенна и $P \subset G$, то $P = (P, P) \subset (G, G)$. Таким образом, $P_G \subseteq (G, G)$.

Определение 12.15. Группа G *квазисовершенна*, если (G, G) совершенна (эквивалентно, если $P_G = (G, G)$).

Если $\pi_1(X)$ квазисовершенна, то $\pi_1(X) \to \pi_1(X)^+$ — это абелизация.

Теорема 12.16 ([RW13, Corollary 1.2])**.** *Пусть* M *— гомотопически коммутативный моноид,* $\pi_0(M)$ *счётна. Тогда*

(1) $\pi_1(M_\infty)$ *квазисовершенна;*
(2) $(M_\infty)^+ \simeq \Omega BM$.

Доказательство. По теореме 12.8, имеем ацикличное отображение $M_\infty \to \Omega BM$. На каждой компоненте связности это отображение $(M_\infty)_\alpha \to (\Omega BM)_\alpha$ является плюс-конструкцией относительно подгруппы $\mathrm{Ker}(\pi_1(M_\infty, \alpha) \to \pi_1(\Omega BM, \alpha))$ (по лемме 12.10). Осталось доказать, что эта подгруппа — в точности коммутант $\pi_1(M_\infty, \alpha)$. Действительно, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M_\infty, \alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\Omega BM, \alpha) \arrow[d, "\simeq"] \\
H_1((M_\infty)_\alpha) \arrow[r, "\simeq"] & H_1((\Omega BM)_\alpha).
\end{tikzcd}$$

(Изоморфизмы — из теоремы о групповом пополнении и того факта, что $\pi_1(\Omega BM, \alpha)$ абелева). Так как $H_1((M_\infty)_\alpha) \cong \pi_1(M_\infty, \alpha)_{ab}$, получаем, что $\pi_1(M_\infty, \alpha) \to \pi_1(\Omega BM, \alpha)$ — абелизация. $\square$

Мораль: наивное групповое пополнение $M \to M_\infty$ сделало $\pi_0(M)$ группой, но не заметило, что при групповом пополнении π_1 должна стать абелевой. Ацикличное отображение $M_\infty \to \Omega BM$ исправляет ситуацию.

Теорема 12.17 (Барратт, Придди, Квиллен)**.** *$(B\mathfrak{S}_\infty)^+ \simeq \Omega_0^\infty S^\infty$, $(B\mathrm{Br}_\infty)^+ \simeq \Omega_0^2 S^2$. В частности, у этих пространств одинаковые гомологии с любыми локальными коэффициентами.*

Доказательство. Рассмотрим моноид $M = \bigsqcup_{k\geq 0} B\mathfrak{S}_k$. Как мы обсуждали, $\Omega BM \simeq \Omega^\infty\Sigma^\infty S^0 \simeq \mathbb{Z} \times \Omega_0^\infty S^\infty$, $M_\infty \simeq \mathbb{Z} \times B\mathfrak{S}_\infty$. Аналогично со второй частью. $\square$

12.3. **Алгебраическая K-теория по Квиллену.**

Определение 12.18. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Введём пространство $K^Q(R) := K_0(R) \times (BGL(R))^+$ и абелевы группы $K_i(R) := \pi_i(K(R))$.

Теорема 12.19. *K-теория по Квиллену и по Сигалу согласована: $K^Q(R) \simeq K(R) := \Omega B(B(\mathrm{iso}\,\mathcal{P}_R))$.*

(Формально, наши рассуждения работают, только если R не более чем счётно, но можно докрутить до общего случая.)

Грубый набросок доказательства. Можно показать, что $K(R) \simeq \Omega BM$, где $M = \bigsqcup_{[P]} B\mathrm{Aut}_R(P)$ — "гомотопически коммутативный топологический моноид" (несвязное объединение берётся по классам изоморфизма к.п. проективных R-модулей; умножение индуцировано взятием прямых сумм автоморфизмов).

Если бы модули были только свободными — мы бы имели $M' \simeq \bigsqcup_{k\geq 0} B\mathrm{Aut}_R(R^k) = \bigsqcup_{k\geq 0} BGL_k(R)$, и тогда ясно, что $M'_\infty \simeq \mathbb{Z} \times BGL(R)$,

$$\Omega BM' \simeq (M'_\infty)^+ \simeq \mathbb{Z} \times (BGL(R))^+.$$

У нас ситуация другая, но свободные модули образуют кофинальную систему в проективных, поэтому $M_\infty \simeq K_0(R) \times BGL(R)$, и дальше рассуждение аналогично. $\square$

Замечание 12.20. Заметим, что $\pi_1(M_\infty) \cong GL(R)$. Поэтому из теоремы 12.16 следует, что $\pi_1(M_\infty) = GL(R)$ квазисовершенна (т.е. группа $(GL(R), GL(R))$ совершенна), и $K_1(R) \cong GL(R)_{ab}$. Обычно это доказывают напрямую.

С этой точки зрения $(B\mathfrak{S}_\infty)^+$ можно интерпретировать как "алгебраическую K-теория поля из одного элемента", $K(\mathbb{F}_1) \simeq \Omega^\infty S^\infty$ (и, таким образом, "$K_*(\mathbb{F}_1) \simeq \pi_*^s$".)

12.4. **Теорема об аппроксимации для коммутативных моноидов.** Напоминание: если $A \supseteq A_0$ и M — коммутативный моноид, то определено пространство $\mathcal{C}(A, A_0; M)$. На нём есть структура коммутативного моноида (поточечное умножение конфигураций).

Лемма 12.21. $\mathcal{C}(A, A_0; \mathcal{C}(A', A'_0; M)) \cong \mathcal{C}(A \times A', (A \times A'_0) \cup (A_0 \times A'); M)$. $\square$

Вспомним, что $BM := \mathcal{C}(D^1, S^0; M)$.

Следствие 12.22. $\mathcal{C}(A, A_0; BM) \cong B(\mathcal{C}(A, A_0; M))$. $\square$

Следствие 12.23. $B^n M \cong \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; M)$. $\square$

Вообще случай коммутативных моноидов не так интересен именно потому, что тут есть функториальность и относительно неинъективных отображений. Поэтому $\mathcal{C}(A, A_0; M)$ — инвариант гомотопической эквивалентности для пар (A, A_0). В частности, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; M) \simeq M$.

Определение 12.24. Пусть A — гладкое многообразие, M — коммутативный моноид. Введём локально тривиальное расслоение $E(A;M) := \mathcal{C}(\mathbb{D}(\tau A), \mathbb{S}(\tau A); M)$. То есть, слой над точкой $p \in A$ — это

$$\mathcal{C}(\mathbb{D}(T_pA), \mathbb{S}(T_pA); M) \cong \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; M) \cong B^n M.$$

Теорема 12.25. *Пусть $A \supset A_0$ — гладкое подмногообразие, M — коммутативный моноид, причём (A, A_0) связна или M связно. Тогда сканирующее отображение*

$$\gamma : \mathcal{C}(A, A_0; M) \to \Gamma(A \setminus A_0, \partial(A) \setminus A_0; E(A;M))$$

— гомотопическая эквивалентность. В частности:

- *Если A не имеет замкнутых компонент или M связно, то $\mathcal{C}(A, \partial A; M) \simeq \Gamma(A; E(A, M))$;*
- *Если M связно, то $\mathcal{C}(A; M) \simeq \Gamma(A, \partial A; E(A;M))$.*

Доказательство. Та же схема, что и раньше (даже проще: для ручек всё сразу сводится к паре (D^k, S^{k-1})). □

Следствие 12.26. *В условиях теоремы: если A параллелизуемо, то $\mathcal{C}(A, A_0; M) \simeq Map((A \setminus A_0, \partial(A) \setminus A_0), (B^n A, *))$. В частности:*
Если A не имеет замкнутых компонент или M связно, то $\mathcal{C}(A, \partial A; M) \simeq Map(A, B^n M)$;
Если M связно, то $\mathcal{C}(A; M) \simeq Map_*(A/\partial(A), B^n M)$.

Например, получаем:

$$\mathcal{C}(A; S^1) \simeq Map_*(A/\partial A, K(\mathbb{Z}, n+1)), \quad \mathcal{C}(A, \partial A; S^1) \simeq Map(A, K(\mathbb{Z}, n+1));$$

если N не имеет замкнутых компонент, то для дискретной абелевой группы G имеем $\mathcal{C}(N, \partial N; G) \simeq Map(N, K(G, n))$.

13. Частичные моноиды (4 мая)

Я обещал поговорить о теореме Сигала: если $X \in \mathcal{T}op_*$ и $n \geq 1$, то $B(\mathcal{C}'_n(X)) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}; \Sigma X)$. Мы её сведём к более интуитивной теореме (которую, правда, не докажем). Для этого нужен общий фреймворк, в который помещаются и "частицы, которым нельзя сталкиваться", и "частицы, которым можно сталкиваться и перемножаться".

13.1. **Определения.**

Определение 13.1. *Частичный моноид* (ЧМ) — это множество X с отмеченной точкой e и частичным умножением $X \times X \supset X_2 \xrightarrow{\mu} X$, где

- $X \vee X \subseteq X_2$, и $x \cdot e = e \cdot x = x$;
- Произведение $x \cdot (y \cdot z)$ определено тогда и только тогда, когда определено $(x \cdot y) \cdot z$, и тогда они равны.

Для частичного моноида корректно определено множество перемножаемых элементов $X_n \subset X^{\times n}$ и n-кратное произведение $X_n \to X$.

Несколько конструкций:

- Если X — ЧМ и $A \subset X$, то на A есть индуцированная структура ЧМ: $A_2 := \{(a_1, a_2) \in A^2 \cap X_2 \mid a_1 \cdot a_2 \in A\}$;
- Всякое $X \in \mathcal{T}op_*$ — КЧМ X_{triv} относительно тривиального умножения $X_2 = X \vee X$.
- $X_1 \times X_2$ — ЧМ.
- Для $1 \leq d \leq \infty$ и пространства $X \in \mathcal{T}op_*$ на его симметрической степени $SP^d(X) := X^{\times d}/\mathfrak{S}_d$ есть структура КЧМ (мы рассматриваем точки $SP^d(X)$ не как мультимножества в X мощности d, а как мультимножества в $X \setminus \{*\}$ мощности $\leq d$; если сумма мощностей $\leq d$, то можно объединить два таких мультимножества). Например, $SP^1(X) = X_{triv}$, а $SP^\infty(X)$ — полноценный моноид.

Например, $\mathbb{Z}_{\leq 0} \vee \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — коммутативный частичный моноид: положительные числа нельзя складывать с отрицательными, а числа одного знака – можно.

Ещё пример: $\{0, \ldots, n\} \subset \mathbb{Z}$ — коммутативный частичный моноид (числа можно складывать, если их сумма не превосходит n).

Определение 13.2. Для *коммутативного* частичного моноида (КЧМ) X и пространства A обозначим

$$C_k(A,X) := \{(p_1,\dots,p_k;x_1,\dots,x_k) \in A^k \times X^k \mid \text{если } p_{i_1} = \dots = p_{i_s}, \text{ то } (x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in X_s\};$$

для $A \supset A_0$ обозначим

$$\mathcal{C}(A,A_0;X) := \Big(\bigsqcup_{k\geq 0} C_k(A,X)/\mathfrak{S}_k\Big)/\sim,$$

где

- $[p_1,\dots,p_k;x_1,\dots,x_k] \sim [p_1,\dots,\widehat{p}_i,\dots,p_k;x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_k]$, $p_i \in A_0$ или $x_i = e$;
- $[p_1,\dots,p,p,\dots,p_k;x_1,\dots,x,x',\dots,x_k] \sim [p_1,\dots,p,\dots,p_k;x_1,\dots,x\cdot x',\dots,x_k]$.

Для частичного моноида X и $A \subset \mathbb{R}$ обозначим

$$C_k^{ord}(A,X) := \{(p_1,\dots,p_k;x_1,\dots,x_k) \in A^k_{ord} \times X^k \mid \dots\},$$

$$\mathcal{C}(A,A_0;X) := \Big(\bigsqcup_{k\geq 0} C_k^{ord}(A,X)\Big)/\sim.$$

Примеры:

- $\mathcal{C}(\mathbb{C};\mathbb{Z}_{\leq 0} \vee \mathbb{Z}_{\geq 0})$ — это пространство приведённых рациональных функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (точки с положительными метками — нули, точки с отрицательными метками — полюса).
- $\mathcal{C}(A;\{0,\dots,n\})$ — это конф. пространство “частиц, которые собираются не более чем по n штук в каждой точке”.
- Если X — тривиальный частичный моноид, то $\mathcal{C}(A,A_0;X)$ — как раньше. В частности, $\mathcal{C}(I,\partial I;X) \simeq \Sigma X$.

Определение 13.3. Для частичного моноида X его *классифицирующее пространство* BX — это геометрическая реализация симплициального пространства $[k] \mapsto X_k$, то есть

$$BX := \Big(\bigsqcup_{k\geq 0} \Delta^k \times X_k\Big)/\sim,$$

где отождествление такое же, как в $\mathcal{C}(I,\partial I;X)$.

Предложение 13.4.
(1) *Если X — коммутативный частичный моноид, то $\mathcal{C}(A,A_0;X)$ — тоже.*
(2) $\mathcal{C}(A,A_0;\mathcal{C}(A',A'_0;X)) \cong \mathcal{C}(A\times A',(A\times A'_0)\cup(A_0\times A');X)$.
(3) $B^nX \simeq \mathcal{C}(D^n,S^{n-1};X)$. *Если X тривиальный, то* $B^nX \simeq \Sigma^nX$.
(4) $B\mathcal{C}(A,A_0;X) \simeq \mathcal{C}(A,A_0;BX)$.
(5) $\mathcal{C}(A,A_0;X)$ — *инвариант монотопической эквивалентности, ...*
(6) *Для $X \in \mathcal{T}op_*$, $B(SP^d(X)) \cong SP^d(\Sigma X)$. В частности, $B(X_{triv}) \cong \Sigma X$.*

Доказательство. Задача. □

13.2. **Групповое пополнение.** Как и для $X \in \mathcal{T}op_*$, для частичного моноида X рассмотрим

$$\mathcal{C}'_n(X) := \{(c,t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \operatorname{supp}(c) \subset (0,t) \times \mathbb{R}^{n-1}\}$$

— топологический моноид, гомотопически эквивалентный $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X)$, умножение на котором соответствует “конкатенации” $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(Не путать с частичным моноидом $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X)$, который получается наложением конфигураций друг на друга! Для него имеем $B\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n;BX) \simeq \Omega^nB^{n+1}X$.) Добринская доказала следующее усиление теоремы Сигала.

Теорема 13.5 (Сигал/Добринская)**.** *Если X — частичный моноид, то $B(\mathcal{C}'_1(X)) \simeq BX$.* □

По сути, достаточно доказать, что $\mathcal{C}(I,\partial I;\mathcal{C}'_1(X)) \simeq \mathcal{C}(I,\partial I;X)$, а это звучит правдоподобно: и слева, и справа у нас “конечное множество частиц, которые зажаты на отрезке”.

Следствие 13.6. *Если X — частичный моноид, то $B(\mathcal{C}'_n(X)) \simeq \Omega^{n-1}B^nX$. В частности,*

- $(C'_n(X))^{gr} \simeq \Omega^nB^nX$.
- *Если X связно, то $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X) \simeq \Omega^nB^nX$.*

Доказательство. Индукция по n. Шаг индукции: заметим, что $\mathcal{C}'_{n+1}(X) \cong \mathcal{C}'_1(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X))$ и $B(\mathcal{C}(A;X)) \cong \mathcal{C}(A; BX)$, поэтому

$$B(\mathcal{C}'_{n+1}(X)) = B(\mathcal{C}'_1(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X))) \simeq B\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \cong \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; BX) \simeq \mathcal{C}'_n(BX).$$

Далее, BX связно, поэтому моноид $\mathcal{C}'_n(BX)$ связен, поэтому $\mathcal{C}'_n(BX) \simeq \Omega B\mathcal{C}'_n(BX)$. По предположению индукции, это пространство гомотопически эквивалентно $\Omega(\Omega^{n-1}B^n(BX)) = \Omega^n B^{n+1}X$, что и требовалось. □

Следствие 13.7 (Сигал). *Если $X \in \mathcal{T}op_*$, то $B(\mathcal{C}'_n(X)) \simeq \Omega^{n-1}\Sigma^n X$.* □

13.3. **Примеры: "аппроксимации многочленами".**

13.3.1. *Многочлены без кратных корней.* Понятно:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^2; (S^0)_{triv}) = \coprod_{k\geq 0} C_k(\mathbb{R}^2), \quad C_k(\mathbb{R}^2) = \{k \text{ точек в } \mathbb{C}^1\} = \{\text{приведённые многочлены степени } k \text{ без кратных корней}$$

Это пространство гомотопически эквивалентно моноиду $M := \mathcal{C}'_2((S^0)_{triv})$, $M = \coprod_{k\geq 0} M_k$, $M_k \simeq C_k(\mathbb{R}^2) = B(Br_k)$. Теорема Сигала утверждает, что

$$\Omega BM \simeq \Omega^2 B^2((S^0)_{triv}) = \Omega^2\Sigma^2 S^0 = \Omega^2 S^2 \simeq \mathbb{Z} \times \Omega^2 S^3$$

(последняя ГЭ из расслоения Хопфа).

Более точно: сканирующее отображение $M \to \Omega^2 S^2 = Map_*(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^1)$ — это групповое пополнение. Это довольно красиво, потому что M — это пространство многочленов (а всякий многочлен задаёт отображение $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, $\infty \mapsto \infty$).

Применим теорему о групповом пополнении: видим $M_\infty \simeq \mathbb{Z} \times B(Br_\infty)$ и, таким образом, $B(Br_\infty)^+ \simeq \Omega^2 S^3$; в частности, $\mathrm{H}_*(Br_\infty) \simeq H_*(\Omega^2 S^3)$. Известно, что $\mathrm{H}_*(Br_k) \to \mathrm{H}_*(Br_\infty)$ при $* < f(k)$ (для некоторой функции $f(k)$) и, таким образом,

$$\mathrm{H}_{<f(k)}(Br_k) = H_{<f(k)}(C_k(\mathbb{R}^2)) \cong H_{<f(k)}(\Omega^2 S^3) \cong H_{<f(k)}(\Omega^2_k S^2).$$

То есть, у пространства полиномиальных отображений $(\mathbb{C}P^1, \infty) \to (\mathbb{C}P^1, \infty)$ степени k гомологии (в некотором диапазоне, который растёт с ростом k) такие же, как у пространства $\Omega^2_k S^2$ непрерывных отображений $(\mathbb{C}P^1, \infty) \to (\mathbb{C}P^1, \infty)$ степени k.

13.3.2. *Многочлены ограниченной кратности.* Изучим пространства

$$Pol_{k,\leq d} = \{\text{приведённые многочлены степени } k \text{ с корнями кратности } \leq d\}.$$

Тут надо рассмотреть частичный моноид $\{0, \ldots, d\} = SP^d(S^0)$; тогда

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^2; SP^d(S^0)) = \coprod_{k\geq 0} Pol_{k,\leq d}$$

и гомотопически эквивалентный ему моноид $M = \mathcal{C}'_2(SP^d(S^0)) \simeq \coprod_{k\geq 0} M_k$. Теорема говорит, что

$$\Omega BM \simeq \Omega^2 B^2(SP^d(S^0)) \simeq \Omega^2(SP^d(\mathbb{C}P^1)) \simeq \Omega^2\mathbb{C}P^d$$

(последний шаг — это проективизация стандартного гомеоморфизма $SP^d(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^d$, который даётся теоремой Виета.)

Опишем гомотопический тип чуть точнее. Имеем расслоение

$$\Omega S^{2d+1} \to \Omega\mathbb{C}P^d \xrightarrow{f} S^1 \to S^{2d+1} \to \mathbb{C}P^d.$$

Отображение f имеет гомотопическое сечение (так как это изоморфизм на π_1, а π_1 — это отображения из окружности), а на $\mathbb{C}P^d$ есть умножение. Значит, $\Omega\mathbb{C}P^d \simeq S^1 \times \Omega S^{2d+1}$. Итак, в нашей ситуации $\Omega BM \simeq \mathbb{Z} \times \Omega^2 S^{2d+1}$, то есть $\Omega^2 S^{2d+1} = X^+$, где $M_\infty \simeq \mathbb{Z} \times X$, $X = \mathrm{colim}_{k\to\infty} Pol_{k,\leq d}$. Опять получаем, что

$$H_*(X) \cong H_*(\Omega^2 S^{2d+1}), \quad H_{<f(k)}(Poly_{k,\leq d}) \cong H_{<f(k)}(\Omega^2 S^{2d+1}) = H_{<f(k)}(\Omega^2_k \mathbb{C}P^d).$$

Тут интерпретация, видимо, такая: надо рассмотреть отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^d$, $z \mapsto (f(z), f'(z), \ldots, f^{(d-1)}(z))$, и взять замыкание образа, $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^d$.

13.3.3. *Рациональные функции.* Изучим пространства

$$Rat_{k,\ell} = \{\text{рациональные функции } f(z)/g(z),\ \deg f = k,\ \deg g = \ell\}$$

(где корни f и g не пересекаются). Это история про нули и полюса конечной кратности, где нулям разрешено сталкиваться с нулями, полюсам — с полюсами, но нулям с полюсами нельзя. Это частичный моноид $\mathbb{Z}_{\geq 0} \vee \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Получаем

$$M := \mathcal{C}_2'(\mathbb{Z}_{\geq 0} \vee \mathbb{Z}_{\geq 0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z}_{\geq 0} \vee \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cong \bigoplus_{k,\ell \geq 0} Rat_{k,\ell}.$$

По теореме,

$$\Omega BM \simeq \Omega^2 B^2(\mathbb{Z}_{\geq 0} \vee \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

Как известно, $B(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = S^1$, $B(X \vee Y) \cong BX \vee BY$, поэтому

$$\Omega BM \simeq \Omega^2(\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}^2 \times \Omega^2 S^3$$

(последний шаг — это гомотопическая эквивалентность $\Omega(X \vee Y) \simeq \Omega X \times \Omega Y \times \Omega\Sigma(\Omega X \wedge \Omega Y)$, которую мы когда-то обсуждали). Как и раньше, получаем $Rat^+_{\infty,\infty} \simeq \Omega^2 S^3$, $H_{<f(k,\ell)}(Rat_{k,\ell}) \cong H_{<f(k,\ell)}(\Omega^2 S^3)$.

При $k = \ell$ интерпретация как с многочленами: отношение многочленов одинаковой степени k задаёт отображение $(\mathbb{C}P^\infty, \infty) \to (\mathbb{C}P^1, 1)$ степени k, и оно приводит к изоморфизму $H_{<f(k,k)}(Rat_{k,k}) \cong H_{<f(k,k)}(\Omega^2_k S^2)$.

13.4. **PDPAM'ы.**

Определение 13.8. КЧМ X — PDPAM (pairwise determined partial abelian monoid), если $X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_i, x_j) \in X_2,\ \forall i, j\}$.

Приятное свойство PDPAM'ов — что у них есть тензорное произведение.

Определение 13.9. Пусть A, B — PDPAM'ы (где используется аддитивная запись, т.е. $+ : A_2 \to A$, $a + 0 = 0 + a = a$. Введём пространство формальных линейных комбинаций $T^0_{A,B} := \bigsqcup_{k \geq 0} SP^k(A \times B) = \{``\sum_{i=0}^k a_i \otimes b_i" : k \geq 0,\ a_i \in A,\ b_i \in B\}$, подпространство

$$T_{A,B} := \{\sum_i a_i \otimes b_i \in T^0_{A,B} \mid \forall i \neq j :\ \exists a_i + a_j \text{ или } \exists b_i + b_j\},$$

и его факторпространство

$$A \otimes B := T_{A,B}/\sim, \quad a \otimes 0 \sim 0 \sim 0 \otimes b, \quad a \otimes b + a' \otimes b \sim (a + a') \otimes b,\ a \otimes b + a \otimes b' \sim a \otimes (b + b').$$

Проверяется: $A \otimes B$ — тоже PDPAM.

Предложение 13.10. *Пусть X — PDPAM. Тогда*

(1) $BX \cong X \otimes S^1$.
(2) *(В дискретном случае) $X \otimes \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — моноидальное пополнение, а $X \otimes \mathbb{Z}$ — групповое пополнение для X.*
(3) $\mathcal{C}(A, A_0; X) \cong \mathcal{C}(A, A_0; S^0) \otimes X$.

А ещё для PDPAM'ов есть теорема об аппроксимации (я не проверял, верна ли она для произвольных КЧМ, но кажется, что верна...)

Теорема 13.11 (Salvatore / Cnossen)**.** *Если X — PDPAM, то верна теорема об аппроксимации (если $A \supset A_0$ — компактное многообразие с краем, X связно или (A, A_0) связно, то $\mathcal{C}(A, A_0; X) \simeq \Gamma(A \setminus A_0, \partial A \setminus A_0; E(A, X))$, где $E(A, X) \to X$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathcal{C}(\mathbb{D}(T_p A), \mathbb{S}(T_p A); X) \simeq \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X) \simeq B^n X$.)*

В параллелизуемом случае правая часть гомотопически эквивалентна $Map(A \setminus A_0, \partial A \setminus A_0; B^n X)$.

Следствие 13.12. *Если X — связный PDPAM, то $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \simeq \Omega^n B^n X$, $\mathcal{C}(S^1; X) \simeq LBX$.* □

Следствие 13.13. *Если X — любой PDPAM, то $B\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \simeq \Omega^n B^{n+1} X$.*

Доказательство. BX связен, поэтому $B\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; BX) \simeq \Omega^n B^n(BX)$. □

Ещё забавное следствие — это двойственность Пуанкаре для параллелизуемых многообразий. Возьмём дискретную абелеву группу $X = G$ в качестве коммутативного частичного моноида. Тогда $B^n X = K(G, n)$, поэтому теорема утверждает (скажем, для компактного параллелизуемого многообразия без замкнутых компонент): $\mathcal{C}(M, \partial M; G) \simeq Map(M, K(G, n))$; в частности,

$$\begin{aligned}\pi_k(\mathcal{C}(M, \partial M; G)) &\cong \pi_k(Map_*(M \sqcup \{pt\}, K(G,n)) \cong \pi_0(Map_*(S^k, Map_*(M \sqcup \{pt\}, K(G,n)) \\ &\cong \pi_0(Map_*(M \sqcup \{pt\}, Map_*(S^k, K(G,n)))) \cong \pi_0(Map_*(M \sqcup \{pt\}, \Omega^k K(G,n))) \\ &\cong [M, K(G, n-k)] \cong H^{n-k}(M; G).\end{aligned}$$

Группа, с которой мы стартовали — это $H_k(M, \partial M; G)$ по “относительной теореме Дольда–Тома с коэффициентами”.

Список литературы

[Арн70] В. И. Арнольд. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций (1970).

[May70] J. P. May. A general algebraic approach to Steenrod operations (1970). 35, 36

[May72] J. P. May. *Geometry of iterated loop spaces* (1972). 28

[Seg73] G. Segal. Configuration-Spaces and Iterated Loop-Spaces (1973). 57

[BE74] M. G. Barratt and P. J. Eccles. Γ^+-Structures-I: a free group functor for stable homotopy theory (1974). 30

[MiSt74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic classes* (1974). 11

[CL75] F. Cohen and E. L. Lusk. Coincidence point results for spacs with free $\mathbb{Z}_p$-actions (1975). 33

[McD75] D. McDuff. Configuration spaces of positive and negative particles. Topology 14 (1975), 91-107. 43

[McDS76] D. McDuff and G. Segal. Homology fibrations and the “group-completion” theorem. Invent. Math. 31 (1975/76), no. 3, 279-284. 57

[Coh76] F. Cohen. The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$-spaces, $n \geq 0$. In: F. R. Cohen, T. J. Lada, J. P. May. *The homology of iterated loop spaces* (1976). 35, 37

[CT78] F. R. Cohen and L. R. Taylor. Computations of Gelfand-Fuks cohomology, the cohomology of function spaces, and the cohomology of configuration spaces (1978). 13

[CMT78] F. R. Cohen, J. P. May and L. R. Taylor. Splitting of certain spaces CX (1978).

[Bod87] C.-F. Bödigheimer. Stable splittings of mapping spaces (1987). 42, 43, 47, 48

[BCT89] C.-F. Bödigheimer, F. Cohen and L. R. Taylor. On the homology of configuration spaces (1989). 50

[BF02] C. Berger, B. Fresse. Combinatorial operad actions on cochains (2002). 30

[BM03] C. Berger, I. Moerdijk. Axiomatic homotopy theory for operads (2003).

[Sin04] Dev Sinha. Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces (2004). 31

[Sin05] Dev Sinha. Operads and knot spaces (2005). 31

[BLZ12] P. V. M. Blagojević, W. Lück, G. M. Ziegler. Equivariant topology of configuration spaces (2012). 32

[KHA13] R. Karasev, A. Hubard, B. Aronov. Convex equivipartitions: the spicy chicken theorem (2013). 34

[RW13] O. Randal-Williams. “Group-completion”, local coefficient systems, and perfection (2013). 58, 59

[Hatcher15] A. Hatcher. *Algebraic Topology* (2015). 4, 7

[ERW18] J. Ebert, O. Randal-Williams. Semi-simplicial spaces (2018). 58

[Knu18] B. Knudsen. Configuration spaces in algebraic topology. Expository notes (2018), arXiv:1803.11165 2, 42, 47

[Cno19] B. Cnossen. Configuration spaces as partial abelian monoids. Master Thesis (2019), University of Bonn.

[MZZ20] J. P. May, R. Zhang and F. Zou. Unital operads, monoids, monads, and bar constructions (2020), arXiv:2003.10934 18

[Knu24] B. Knudsen. Lie algebras and the (co)homology of configuration spaces (2024), arXiv:2412.14909

[Kal25] S. Kallel. Configuration spaces of points: a user’s guide (2025), arXiv:2407.11092 2