

6

6.1. Пусть эллипс на евклидовой плоскости с координатами X, Y задан уравнением $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Воспользовавшись тригонометрической параметризацией $X = a \cos T$, $Y = b \sin T$, покажите, что "дифференциал" длины его дуги имеет вид

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} dT.$$

6.2. Введя

$$Z := \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T},$$

проверьте равенство

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 + b^2.$$

Убедитесь, что на соответствующем пересечении сферы с эллиптическим цилиндром имеет место равенство

$$ds = \frac{b}{a} \frac{Z dX}{Y}.$$

6.3. Введя параметризацию

$$\frac{X}{a} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \frac{Y}{b} = \frac{2u}{1+u^2},$$

проверьте, что на *лежандроподобной* кватернике

$$\ddot{\mathbf{X}}(a, b) : v^2 = 1 + \left(4 \frac{a^2}{b^2} - 2\right) u^2 + u^4$$

имеет место равенство

$$-ds = 2b \frac{v du}{(1+u^2)^2}.$$

6.4. Покажите, что *полная длина эллипса*

$$\text{Len}(a, b) := \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} dT$$

– умноженный на b *период дифференциала второго рода* на пополненной кривой $\mathbf{X}(a, b)$.

6.5. Введя новую параметризацию $U := \text{tg } T \frac{2u}{1-u^2}$, рассмотрите кривую

$$\ddot{\mathbf{Y}}(a, b) : V^2 = (1+U^2) \left(1 + \frac{a^2}{b^2} U^2\right)$$

и выразите длину эллипса как период дифференциала второго рода на ней.

6.6. Постройте 2-изогению, связывающую кривые $\mathbf{X}(a, b)$ и $\mathbf{Y}(a, b)$.

6 ноября, Г.Б. Шабат