ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОЧЕК 3: ОСНОВЫ ГОМОЛОГИЙ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Проверьте равенство $\partial^2 = 0$ для дифференциала $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \cdots + (-1)^n \partial_n$.

2. Для короткой точной последовательности цепных комплексов

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$$

рассмотрим цикл $c \in C_n$. Так как j — сюръективно, $c = j(b)$. Так как $\partial_C(c) = 0$, $j\partial_B(b) = \partial_C(j(b)) = \partial_C(c) = 0$. Следовательно, из точности, $\partial_B(b) = i(a)$. Проверьте, что $a \in A_{n-1}$ — цикл, и описанная процедура однозначно и корректно определяет гомоморфизм $\partial\colon H_n(C) \to H_{n-1}(A)$, $[c] \mapsto [i^{-1}\partial_B j^{-1}(c)]$. Докажите, что получающаяся последовательность гомологий

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

точна.

3. а) Для пространства X рассмотрим *аугментированный цепной комплекс* $\widetilde{C}(X) = \cdots \to C_n(X) \to \cdots C_1(X) \to C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$, отличающийся от комплекса сингулярных цепей лишь в размерности -1, в которой $\varepsilon(\sum k_i\sigma_i) = \sum k_i$ для нульмерных сингулярных симплексов σ_i. Постройте естественный по X морфизм цепных комплексов $\widetilde{C}(X) \to C(X, x_0)$, индуцирующий изоморфизм на гомологиях.
б)* Постройте естественный по X морфизм цепных комплексов $\widetilde{C}_*(X) \to \widetilde{C}_{*+1}(\Sigma X)$, индуцирующий изоморфизм надстройки на гомологиях.

4. Рассмотрим сингулярный симплекс $p_n\colon \Delta^n \to S^n$, стягивающий границу $\partial\Delta^n$ в точку. Является ли он образующей гомологий $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$? Если нет, как это можно исправить?

5. Докажите, что для любой тройки $B \subset A \subset X$ имеет место длинная точная последовательность гомологий

$$\cdots \to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \to \cdots$$

где $\partial\colon H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(A, B)$.
В частности, получаем длинную точную последовательность пары для приведённых гомологий.

6. Докажите, что отношение $\sim$ цепной эквивалентности между морфизмами цепных комплексов обладает следующими свойствами:

(1) это отношение эквивалентности;
(2) оно уважает сложение, то есть, $f \sim f'$ и $g \sim g' \Rightarrow f + g \sim f' + g'$;
(3) оно уважает композицию, то есть, $f \sim f'$ и $g \sim g' \Rightarrow fg \sim f'g'$.

7. Для цепного комплекса (конечной длины) векторных пространств (конечномерных) над полем $\mathbb{k}$

$$0 \to C_n \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$$

рассмотрим знакопеременную сумму $\chi(C) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}}(C_i)$. Докажите, что $\chi(C) = \chi(H(C)) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{k}}(H_i(C))$. Верно ли это для конечных комплексов из конечно порождённых абелевых групп, если заменить размерность на ранг (где $\mathrm{rk}(\mathbb{Z}^n \oplus$ кручение$) = n$)?

8. Вычислите симплициальные гомологии для следующих Δ-комплексов:
а) окружности S^1 с n вершинами и n рёбрами («n-угольник»);
б) какой-нибудь структуры Δ-комплекса на (двумерном) торе и проективной плоскости;

в) симплекс Δ^2 с отождествлением трёх его вершин в одну точку;
г) S^n с двумя симплексами Δ^n, склеенными по границе;
д)* для какой-нибудь структуры Δ-комплекса на $\mathbb{R}P^n$.

9. Вычислите гомологии следующих пространств:
а) трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$;
б) произвольной замкнутой поверхности (ориентируемой или нет);
в) факторпространства $\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^k$ для $k < n$;
г) пространства $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$;
д)* факторпространства S^3/C_3, где циклическая группа C_3 из трёх элементов действует на единичной сфере $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^3$ посредством умножения обеих координат z_k на $e^{\frac{2\pi i}{3}}$;
е)* факторпространства $S^n/\sim$, где отношение эквивалентности склеивает *антиподальные* точки x и $-x$ на экваториальной подсфере $S^{n-1} \subset S^n$.

10. а) Покажите, что гомотопные отображения пар $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ индуцируют одинаковые отображения в гомологиях $f_*, g_*\colon H_*(X, A) \to H_*(Y, B)$. В частности, гомотопические эквивалентности пар индуцируют изоморфизмы на относительных гомологиях.
б) Докажите, что вложение $(D^n, S^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ индуцирует изоморфизм относительных групп гомологий, но при этом не является гомотопической эквивалентностью пар.
Проверьте, что вообще, если пары (X, A) и (Y, B) гомотопически эквивалентны, то и $(X, \overline{A})$ и $(Y, \overline{B})$ — тоже.

11. а) Докажите, что вложение $A \hookrightarrow X$ ретракта индуцирует вложение прямого слагаемого на группах гомологий. Верно ли это для гомотопических групп?
б) Докажите, что если в клеточной паре (X, A) размерности всех клеток в $X - A$ не превосходят n, то отображение $H_n(A) \to H_n(X)$ является вложением прямого слагаемого.
в) Докажите, что если вложение $A \hookrightarrow X$ гомотопно нулю, то $H_n(X, A) \cong H_n(X) \oplus H_{n-1}(A)$, причём вложение первого слагаемого индуцировано вложением $X \hookrightarrow (X, A)$, а проекция на второе слагаемое совпадает с граничным отображением в последовательности пары (X, A).

12. а) Рассмотрим призму $\Delta^n \times I$ с вершинами $v_0, \ldots, v_n$ на нижнем основании и $w_0, \ldots, w_n$ — на верхнем (w_i — над v_i). Докажите, что симплексы $[v_1, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$ образуют триангуляцию призмы.
б)* Постройте аналогичную триангуляцию произведения симплексов $\Delta^n \times \Delta^k$.

13. а) Проверьте, что для симплекса Δ^n вершинами симплексов его барицентрического подразбиения служат в точности последовательности барицентров цепочек вложенных граней $\Delta^n \supset \Delta^{n-1}_{i_1} \supset \Delta^{n-2}_{i_1,i_2} \supset \cdots \supset \Delta^1_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \supset \Delta^0_{i_1,\ldots,i_n}$.
б) Докажите, что для симплекса Δ^n с барицентрическими координатами $t_0, \ldots, t_n$ симплексы барицентрического подразбиения выделяются условием $t_{\sigma(0)} \leqslant \ldots \leqslant t_{\sigma(n)}$ для перестановок $\sigma \in \Sigma_{n+1}$.
в) Докажите, что для любого симплекса σ^n барицентрического подразбиения симплекса Δ^n выполнено $\operatorname{diam} \sigma^n \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam} \Delta^n$.
г)* Проверьте, что в барицентрическом подразбиении любого Δ-комплексе у каждого симплекса все вершины различны.
Докажите, что если в Δ-комплексе у каждого симплекса все вершины различны, то его барицентрическое подразбиение является симплициальным комплексом.
В частности, для любого Δ-комплекса его второе барицентрическое подразбиение является симплициальным комплексом.

14. а) Докажите, что факторизация 1-остова $T^2 \to S^2$ индуцирует изоморфизм на вторых гомологиях. В частности, это отображение не гомотопно нулю. Существуют ли не гомотопные нулю отображения $S^2 \to T^2$?

б) Рассмотрим расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$ и стягивание 2-остова трёхмерного тора в точку $T^3 \to S^3$. Докажите, что композиция $T^3 \to S^2$ индуцирует нулевое отображение на всех гомотопических группах и группах гомологий, но само не гомотопно нулю.
в) Постройте отображение $S^1 \vee S^1 \vee S^2 \to T^2$, индуцирующее изоморфизм на всех группах гомологий, но не являющееся гомотопической эквивалентностью.

15. Докажите, что слабая эквивалентность $f\colon X \to Y$ индуцирует изоморфизмы $f_*\colon H_i(X) \to H_i(Y)$ $\forall i \geqslant 0$.

16. Докажите, что $H_i(X \times S^n) \cong H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$, причём проекция $X \times S^n \to X$ индуцирует в гомологиях проекцию на первое слагаемое (здесь считается, что $H_{i<0}(X) = 0$).

17. а) Докажите, что для конечных клеточных пространств $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$.
б) Докажите, что для n-листного накрытия $X \to Y$ между клеточными пространствами $\chi(Y) = n \cdot \chi(X)$.
в)* Докажите, что для локально тривиального расслоения $X \to Y$ между конечными клеточными пространствами, для которого слой F гомотопически эквивалентен конечному клеточному комплексу, выполнено $\chi(Y) = \chi(F) \cdot \chi(X)$.

На самом деле это верно и для расслоений Серра.

18. Если обозначить через M_g ориентированную замкнутую поверхность рода g, найдите необходимые и достаточные условия на g, g', при которых существует накрытие $M_{g'} \to M_g$.

19.* Для перестановки $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ рассмотрим соответствующее аффинное преобразование $\sigma\colon \Delta^n \to \Delta^n$, индуцированное перестановкой вершин симплекса. Тогда для любого сингулярного симплекса $\varphi\colon \Delta^n \to X$ определён другой сингулярный симплекс $\sigma(\varphi) = \varphi \circ \sigma$, что даёт гомоморфизм $\sigma_\#\colon C_n(X) \to C_n(X)$. Докажите, что если $x \in C_n(X)$ — цикл и $\sigma_\#(x)$ — тоже цикл, то разность циклов $\operatorname{sgn}(\sigma)x$ и $\sigma_\#(x)$ является границей (то есть, принадлежит $\operatorname{im}\partial \subset C_n(X)$).

20.* а) Докажите, что структура Δ-комплекса является частным случаем структуры клеточного пространства (в частности, что Δ-комплекс всегда автоматически хаусдорфов).
б) Убедитесь, что для Δ-комплекса X его симплициальный цепной комплекс $(C_*^\Delta(X), \partial)$ изоморфен его клеточному цепному комплексу $(C_*^{CW}(X), \partial^{CW})$.

21.* а) Приведите пример замкнутого подмножества $A \subset X$ такого, что группы $H_*(X, A)$ не изоморфны $\widetilde{H}_*(X/A)$.
б) Приведите пример объединения $X = A \cup B$, для которой не имеет места точная последовательность Майера–Виеториса.

22.* Докажите, что минимальное количество вершин для симплициальной триангуляции тора равно 7, а проективной плоскости — 6.

23. а) Докажите, что морфизм цепных комплексов векторных пространств (над каким-то полем) является гомотопической эквивалентностью $\iff$ он является *квазиизоморфизмом*, то есть, индуцирует изоморфизм на всех векторных пространствах гомологий. Выведите, что любой цепной комплекс (C_*, ∂) векторных пространств гомотопически эквивалентен цепному комплексу $(H_*(C), 0)$ (с нулевыми дифференциалами).
б) Приведите пример морфизма цепных комплексов абелевых групп, который является квазиизоморфизмом, но не является гомотопической эквивалентностью.
в) Докажите, что морфизм цепных комплексов свободных абелевых групп является гомотопической эквивалентностью $\iff$ он является квазиизоморфизмом. Верно ли, что любой цепной комплекс (C_*, ∂) свободных абелевых групп гомотопически эквивалентен цепному комплексу $(H_*(C), 0)$ (с нулевыми дифференциалами).

24. а) Для морфизма цепных комплексов $f\colon (C_*, \partial_C) \to (U_*, \partial_U)$ рассмотрим абелевы группы $Cone(f)_i = C_{i-1} \oplus U_i$ и гомоморфизмы $\partial_{Cone(f)}\colon Cone(f)_i \to Cone(f)_{i-1}$

$$\partial_{Cone(f)}(c, u) = (-\partial c, \partial(u) + f(c))$$

Проверьте, что $(Cone(f), \partial_{Cone(f)})$ является цепным комплексом и докажите, что он включается в короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \to U \to Cone(f) \to \Sigma C \to 0,$$

где ΣC — цепной комплекс с группами $(\Sigma C)_i = C_{i-1}$ и дифференциалом $\partial_{\Sigma C} = -\partial_C$, причём в соответствующей длинной точной последовательности гомологий связывающие гомоморфизмы $\partial \colon H_{i+1}(\Sigma C) = H_i(C) \to H_i(U)$ совпадают с индуцированными гомоморфизмами $f_* \colon H_i(C) \to H_i(U)$.
Выведите, что морфизм f является квазиизоморфизмом $\iff$ цепной комплекс $Cone(f)$ *ацикличен*, то есть, все группы гомологий $H_i(Cone(f))$ равны нулю.
б)* Докажите, что морфизм f является гомотопической эквивалентностью $\iff$ цепной комплекс $Cone(f)$ *стягиваем*, то есть, гомотопически эквивалентен нулевому цепному комплексу.

25. а) Выведите точную последовательность Майера–Виеториса для приведённых гомологий. Что происходит, если $A \cap B = \varnothing$?
б)* Пусть $A, B \subset Y$, $Y = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$, и кроме того, $Y \supset X \supset C, D$, $X = \mathrm{Int}(C) \cup \mathrm{Int}(D)$, причём $C \subset A$ и $D \subset B$. Обозначим $i_{AC} \colon (A \cap B, C \cap D) \hookrightarrow (A, C)$, $i_{BD} \colon (A \cap B, C \cap D) \hookrightarrow (B, D)$, $j_{AC} \colon (A, C) \hookrightarrow (Y, X)$, $j_{BD} \colon (B, D) \hookrightarrow (Y, X)$. Докажите, что имеет место естественная длинная точная последовательность (*относительная последовательность Майера–Виеториса*)

$$\cdots \to H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{(i_{AC})_* \oplus (i_{BD})_*} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{(j_{AC})_* - (j_{BD})_*} H_n(Y, X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A \cap B, C \cap D) \to \cdots$$

26. Обозначим $d_i^n \colon \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ — вложение i-ой гиперграни, $s_i^n \colon \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{n-1}$ — аффинная проекция, заданная на вершинах $s_i^n(v_j) = \begin{cases} w_j, & j \leqslant i \\ w_{j-1}, & j > i \end{cases}$ (здесь $v_0, \ldots, v_n$ — вершины Δ^n и $w_0, \ldots, w_{n-1}$ — вершины Δ^{n-1}).
Для топологического пространства X рассмотрим множества сингулярных симплексов $\mathrm{Sing}^n(X) = \{\sigma \colon \Delta^n \to X\}$ с индуцированными отображениями $(d_i^n)^* \colon \mathrm{Sing}^n(X) \to \mathrm{Sing}^{n-1}(X)$ и $(s_i^n)^* \colon \mathrm{Sing}^{n-1}(X) \to \mathrm{Sing}^n(X)$.
Определим топологические пространства

$$|\mathrm{Sing}(X)| = \Big(\bigsqcup_{n \geqslant 0} \Delta^n \times \mathrm{Sing}^n(X)\Big) \Big/ \Big({\scriptstyle (s_i^n(x), \sigma) \sim (x, (s_i^n)^* \sigma), \atop (d_i^n(x), \sigma) \sim (x, (d_i^n)^* \sigma)} \Big)$$

и

$$||\mathrm{Sing}(X)|| = \Big(\bigsqcup_{n \geqslant 0} \Delta^n \times \mathrm{Sing}^n(X)\Big) \Big/ \Big((d_i^n(x), \sigma) \sim (x, (d_i^n)^* \sigma)\Big)$$

а) Проверьте, что $|\mathrm{Sing}(X)|$ обладает естественной структурой симплициального комплекса и его цепной комплекс $(C_*^\Delta(|\mathrm{Sing}(X)|), \partial)$ изоморфен сингулярному комплексу $(C_*(X), \partial)$.
б) Сингулярные симплексы из объединения образов $\bigcup_{i=0}^n \mathrm{im}\,(s_i^n)_* \subset \mathrm{Sing}^n(X)$ называются *вырожденными*. Обозначим порождённую ими свободную абелеву группу $C_n^{\deg}(X)$. Проверьте, что $C_*^{\deg}(X) \subset C_*(X)$ — цепной подкомплекс. Факторкомплекс $C_*^N(X) = C_*(X)/C_*^{\deg}(X)$ называется *нормализованным сингулярным комплексом*. Докажите, что комплекс $C_*^{\deg}(X)$ имеет нулевые гомологии, и следовательно, проекция $C_*(X) \twoheadrightarrow C_*^N(X)$ индуцирует изоморфизм на гомологиях.
в)* Проверьте, что $||\mathrm{Sing}(X)||$ обладает естественной структурой Δ-комплекса и его цепной комплекс $(C_*^\Delta(||\mathrm{Sing}(X)||), \partial)$ изоморфен нормализованному сингулярному комплексу $(C_*^N(X), \partial)$.
г)* Проверьте, что естественные отображения $\Delta^n \times \mathrm{Sing}^n(X) \to X$, $(x, \sigma) \mapsto \sigma(x)$ индуцируют коммутативную диаграмму непрерывных отображений

$$\begin{tikzcd} \|\mathrm{Sing}(X)\| \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & |\mathrm{Sing}(X)| \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$ (здесь p — естественная проекция).

Докажите, что все отображения в этой диаграмме являются слабыми эквивалентностями. В частности, это даёт явную конструкцию строго функториальной CW-аппроксимации пространств.

27.* Рассмотрим множество сингулярных кубов $\mathrm{Sing}^n_\square(X) = \{\kappa\colon I^n \to X\}$ и порождённую им свободную абелеву группу $C^\square_n(X)$. Для $i = 1, \ldots, n$ и $\varepsilon = 0, 1$ мы имеем вложения гиперграней $f^n_{\varepsilon,i}\colon I^{i-1} \times \{\varepsilon\} \times I^{n-i-1} \hookrightarrow I^n$ и индуцированные ими $(f^n_{\varepsilon,i})^*\colon \mathrm{Sing}^n_\square(X) \to \mathrm{Sing}^{n-1}_\square(X)$.
Определим $\partial^\square\colon C^\square_n(X) \to C^\square_{n-1}(X)$ по формуле

$$\partial(\kappa) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}((f^n_{1,i})^*(\kappa) - (f^n_{0,i})^*(\kappa))$$

Убедитесь, что (эта формула действительно задаёт ориентированную границу куба и) выполнено равенство $(\partial^\square)^2 = 0$. Мы получаем *сингулярный кубический комплекс* пространства X.
Вычислите гомологии этого комплекса для $X = \mathrm{pt}$ и убедитесь, что они не равны нулю в старших размерностях.
Чтобы это исправить, аналогично пункту б) задачи 26 рассмотрим проекции $\pi^n_i\colon I^n \to I^{n-1}$ (вдоль i-ой координаты), индуцированные ими отображения $(\pi^n_i)^*\colon \mathrm{Sing}^{n-1}_\square(X) \to \mathrm{Sing}^n_\square(X)$ и группу $C^{\square,deg}_n(X)$, порождённую *вырожденными кубами* $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{im}\,(\pi^n_i)_* \subset \mathrm{Sing}^n_\square(X)$. Проверьте, что мы получаем цепной подкомплекс и определим *кубические сингулярные гомологии* $H^\square_*(X)$ как гомологии факторкомплекса $C^{\square,N}_*(X) = C^\square_*(X)/C^{\square,\deg}_*(X)$.
Докажите, что $H^\square_*(X)$ удовлетворяют всем тем же свойствам, что и $H_*(X)$: функториальность, гомотопическая инвариантность, длинная точная последовательность пары, изоморфизм вырезания, правильные гомологии точки и т.п.

Докажите, что на самом деле имеет место естественный изоморфизм $H^\square_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(X)$.