

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 8.
Якобиевы поля. 10.04.2022.

Задача 1. Пусть риманово многообразие имеет постоянную секционную кривизну k . Доказать, что $R(X, Y)Z = k((X, Z)Y - (Y, Z)X)$.

Задача 2. Доказать, что кратность сопряжённых точек меньше размерности многообразия. Доказать, что точки, сопряжённые данной точке на данной геодезической, являются изолированными.

Задача 3. Вариация называется геодезической, если для каждого значения параметра вариации соответствующая кривая является геодезической. Докажите, что якобиевы поля — это в точности поля вариации геодезических вариаций.

Задача 4. Доказать, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n - 1$.

Задача 5. Доказать, что для любых двух якобиевых полей X и Y вдоль одной и той же геодезической $\gamma(t)$ выполнено тождество

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} X, Y) - (X, \nabla_{\dot{\gamma}} Y) = \text{const}.$$

В частности, из этого следует, что $(Y, \dot{\gamma}) = at + b$, где a, b постоянные и что в пространстве якобиевых полей $\mathcal{J}$ есть подпространство

$$\mathcal{J}^\perp = \{J \in \mathcal{J} | (J, \dot{\gamma}) = 0\}$$

коразмерности 2.

Задача 6. Доказать, что для ненулевого якобиева векторного поля Y выполнено $|Y|^2 + |\nabla_{\dot{\gamma}} Y|^2 > 0$.

Задача 7. Доказать теорему Бонне-Майерса.

1) Пусть M риманово многообразие, $\gamma(s)$ геодезическая, s натуральный параметр, и выполнено

$$\text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \geq (n - 1)k > 0$$

на $\gamma([0, \beta])$, где $n = \dim M$, и $k > 0$ некоторая константа. Если $\beta \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, то $\gamma((0, \beta])$ содержит точку, сопряжённую с $\gamma(0)$ вдоль γ .

2) Если M полное риманово многообразие размерности $n \geq 2$, и существует константа $k > 0$ такая, что для любого касательного вектора ξ выполнено

$$\text{Ric}(\xi, \xi) \geq (n - 1)k|\xi|^2,$$

то M компактно и $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Задача 8*. Пусть $p \in M$, $X, Y \in T_p M$, $\gamma(t) = \exp_p tX$ и J поле Якоби вдоль γ с начальными данными

$$J(0) = 0, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} J(0) = Y.$$

Доказать, что

$$d_{tX} \exp_p(Y) = \frac{J(t)}{t}.$$

Доказать, что подпространство $\text{Ker } d_X \exp_p$ изоморфно пространству полей Якоби вдоль $\gamma(t) = \exp_p tX$ с нулями в p и $\exp_p X$.