Семинар 2 (27 февраля). Алгебры Ли.

Предложение 1. *Пусть G гладко действует на X, $x \in X$. Обозначим $a_x : G \to X$, $g \mapsto gx$. Тогда $Lie(G_x) = ker(d_e a_x)$.*

Задача 1. Опишите подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) групп Ли:

(а) $O_n(\mathbb{K})$, (б) $SO_n(\mathbb{K})$, (в) U_n, (г) SU_n, (д) $Sp_{2n}(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid AJA^t = J\}$ $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right)$, (е) $O(p,q)$, (ж) $Aff_n(\mathbb{K})$, (з) верхнетреугольных матриц.

Задача 2. Классифицируйте все комплексные алгебры Ли размерности 2 и опишите какие-нибудь группы Ли, с ними связанные.

Задача 3. *Дифференцированием* алгебры A называется линейное отображение $\delta \colon A \to A$, такое что $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. Множество всех дифференцирований A обозначается $Der(A)$.

(а) Покажите, что дифференцирования A образуют алгебру Ли.

(б) Пусть A конечномерна. Покажите, что алгебра Ли группы $Aut(A)$ – это $Der(A)$.

Задача 4. (а) Покажите, что алгебры Ли $\mathfrak{su}_2, \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3$ с векторным произведением изоморфны.

(б) Дайте определение комплексификации вещественной алгебры Ли. Покажите, что комплексификации алгебр из пункта (а) – это $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

(в) Покажите, что $\mathfrak{su}_2 \not\cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Определение 1. Группа Ли называется *полупрямым произведением* своей подгруппы Ли H и нормальной подгруппы Ли N, если $H \to G/N$ – изоморфизм. Обозначается $G = N \rtimes H$.

Задача 5. (а) Сформулируйте понятие полупрямого произведения для алгебр Ли. Покажите, что $Lie(N \rtimes H) \cong Lie(N) \rtimes Lie(H)$.

(б) Пусть $\mathfrak{h}$ действует дифференцированиями на $\mathfrak{n}$, т.е. задано отображение алгебр Ли $\varphi \colon \mathfrak{h} \to Der(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot])$. Постройте по этому полупрямое произведение $\mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h}$.

(в) Покажите, что алгебра Ли аффинной группы является полупрямым произведением $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \ltimes \mathbb{K}^n$ с естественным действием $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ на коммутативной алгебре Ли $\mathbb{K}^n$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. (а) Покажите, что $\forall g \in G\ Ad_g \in Aut(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$.

(б) Выведите из (а) и задачи 3(б) тождество Якоби для $\mathfrak{g}$.

Указание: вспомните, что $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ – гладко.

Задача 2. Обозначим H_2 пространство эрмитовых матриц 2×2. $SL_2(\mathbb{C})$ действует на H_2 по формуле $g.X = gXg^*$.

(а) Покажите, что это действие сохраняет квадратичную форму $det(X)$ на H_2. Убедитесь, что сигнатура этой формы – (1,3) и выпишите какой-нибудь ортонормированный базис H_2. Таким образом, это действие задает отображение $SL_2(\mathbb{C}) \to O(1,3)$

(б) Вычислите дифференциал этого отображения в единице (явно в базисе). Покажите, что он является изоморфизмом.

Дополнительные задачи

Задача 3. (а) Покажите, что коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G можно определить следующим образом. Пусть $x, y \in \mathfrak{g}$, v_x, v_y – левоинвариантные векторные поля на $\mathfrak{g}$, такие что $v_x(e) = x, v_y(e) = y$. Тогда $[v_x, v_y](0) = [x, y]$.

(б) Выведите тождество Якоби в группе Ли непосредственно из ассоциативности умножения, рассмотрев члены степени ≤ 3 в произведении трёх элементов группы Ли, близких к единице