Листок 9. 14 апреля 2025 г.

Евклидовым пространством V размерности n называется n-мерное вещественное векторное пространство с положительное определенной симметрической билинейной формой g. Положим $|v| = \sqrt{g(v,v)}$. В следующих четырех задачах мы работаем в евклидовым пространстве.

Задача 1. Докажите неравенство Шварца $|g(v,w)| \leqslant |v||w|$.

Задача 2. Докажите неравенство треугольника $|v+w| \leqslant |v| + |w|$.

Задача 3. Придумайте индуктивный алгоритм ортогонализации произвольного базиса $e_1, \ldots, e_n$ в V.

Задача 4. Докажите, что если отображение $\phi\colon V \to V$ сохраняет скалярное произведение, то оно линейно.

Задача 5. (Критерий Сильвестра) Пусть Γ – матрица Грама симметрической билинейной формы на векторном пространстве V размерности n. Пусть Δ_k – минор, порожденный первыми k строками и столбцами матрицы Γ. Покажите, что r_- равно количеству перемен знаков в последовательности $1 = \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Покажите, что g положительно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_1, \ldots, \Delta_n > 0$.

Задача 6. Рассмотрим след $\mathrm{Tr}(AB)$ как билинейную симметрическую форму на пространстве $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Найдите ее сигнатуру на следующих подпространствах и вычислите ортогонал к этим подпространствам:

1. матрицы со следом нуль,
2. симметрические матрицы,
3. кососимметрические матриц,
4. (строго) верхне-треугольные матрицы.

Задача 7. Проверьте положительно определенность формы $\mathrm{Tr}(AB^T)$ на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ и формы $\mathrm{Tr}(A\overline{B}^T)$ на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Задача 8. Докажите:

1. $\mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$,
2. $\mathrm{SO}(1,1;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$,
3. $\mathrm{O}(n;\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}$,
4. $\mathrm{U}(n) / \mathrm{SU}(n) \cong \mathbb{S}^1$,
5. $\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$,
6. $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$.

Задача 9. Докажите, что

1. $(\mathrm{Ker}\, A)^\perp = \mathrm{Im}\, A^T$;

2. если $A(U) \subset U$, то $A^T(U^{\perp}) \subset U^{\perp}$.
3. $\mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$;
4. $\det(A^T) = \det(A)$;
5. $\chi_{A^T} = \chi_A$;
6. $m_{A^T} = m_A$.

Задача 10. Рассмотрим решетку, то есть конечно порождённую свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^n$, снабжённую симметрической билинейной формой

$$Q : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}.$$

Двойственная решётка Λ^* определяется как

$$\Lambda^* = \{v \in \Lambda \otimes \mathbb{Q} \,|\, Q(v, w) \in \mathbb{Z} \text{ для любого } w \in \Lambda\},$$

где билинейная форма Q естественным образом продолжается на $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$. *Дискриминантной группой* решётки Λ называется $A_\Lambda = \Lambda^*/\Lambda$. Если Q невырождена, то A_Λ является конечной абелевой группой. В этом случае её порядок $\mathrm{disc}(\Lambda) = |A_\Lambda|$ называется *дискриминантом* решётки Λ.

1. Докажите, что билинейная форма Q индуцирует естественную симметрическую билинейную форму

   $$q_\Lambda \colon A_\Lambda \times A_\Lambda \to \mathbb{Q}/m\mathbb{Z},$$

   где m — любое число, делящее наибольший общий делитель всех чисел $Q(v)$ для $v \in \Lambda$. В частности, если Λ чётна, то существует естественная билинейная форма

   $$q_\Lambda \colon A_\Lambda \times A_\Lambda \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}.$$

2. Предположим, что существует вложение чётных решёток $\Lambda \subset \Lambda'$ такое, что Λ'/Λ — конечная группа. В этом случае мы говорим, что Λ' является надрешёткой для Λ. Докажите, что имеются индуцированные вложения

   $$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda'^* \subset \Lambda^*.$$

   Также существуют индуцированные вложения

   $$\Lambda'/\Lambda \subset \Lambda'^*/\Lambda \subset \Lambda^*/\Lambda = A_\Lambda.$$

   Положим $H_{\Lambda'} = \Lambda'/\Lambda$. Заметим, что $q_\Lambda|_{H_{\Lambda'}} = 0$, поэтому $H_{\Lambda'}$ является изотропной подгруппой в A_Λ, ассоциированной с надрешёткой $\Lambda' \supset \Lambda$.

3. Докажите, что соответствие

   $$\Lambda \subset \Lambda' \mapsto H_{\Lambda'} \subset A_\Lambda$$

   является биекцией между надрешётками решётки Λ и подгруппами в A_Λ, изотропными относительно q_Λ.

4. Пусть Λ — подрешётка решётки Λ' конечного индекса. Докажите, что

   $$\mathrm{disc}(\Lambda) = \mathrm{disc}(\Lambda')(\Lambda' : \Lambda)^2.$$