1. Лекция 3. Алгебры Ли и экспонента.

1.1. **Абстрактные алгебры Ли.**

Определение 3.1. Алгеброй Ли над полем $\Bbbk$ называется векторное пространство $\mathfrak{g}$ над $\Bbbk$ вместе с билинейной операцией

$$[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},$$

удовлетворяющей двум аксиомам:

(1) *Кососимметричность:* $[x,y]=-[y,x]\ \forall\, x,y\in\mathfrak{g}$;
(2) *Тождество Якоби:* $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0\ \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g}$.

Отметим, что алгебры Ли могут быть и бесконечномерными.

Определение 3.2. Пусть $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ – алгебры Ли. Гомоморфизмом алгебр Ли называется линейное отображение

$$\varphi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2,$$

сохраняющее коммутатор, то есть такое, что

$$\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)].$$

Определение 3.3. Идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется векторное подпространство I такое, что $[x,I]\in I$ для любого $x\in\mathfrak{g}$.

Предложение 3.4. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, I - идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда фактор пространство $\mathfrak{g}/I$ является алгеброй Ли, с коммутатором $[x+I,y+I]=[x,y]+I$.

Теорема 3.5. Если $\varphi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ – гомоморфизм, то $\operatorname{Ker}\varphi$ являвяется идеалом, $\operatorname{Im}\varphi$ – подалгеброй Ли и алгебры Ли $\mathfrak{g}_1/\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ изоморфны.

Доказательство. Аналогично обычной теореме о гомоморфизмах для колец. Изоморфизм между $\mathfrak{g}_1/\operatorname{Ker}\varphi$ и $\mathrm{Im}\varphi$ определяется формулой $\psi([x])=\varphi(x)$ для любого $x\in\mathfrak{g}_1$. □

В прошлой лекции мы установили, что алгебра Ли виртуальной подгруппы Ли является подалгеброй Ли.

Предложение 3.6. Алгебра Ли нормальной виртуальной подгруппы Ли является идеалом.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли группа Ли H. Для любого $g\in G$ рассмотрим отображение $C_g:G\to G, h\mapsto ghg^{-1}$. Так как H – нормальна, то $C_g(H)=H$. Это означает, что $d_eC_g(\mathfrak{h})=\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}$. Таким образом, подпространство $\mathfrak{h}$ инвариантно относительно присоединённого действия группы.

Лемма 3.7. Если $f:G\to GL(V)$ – гомоморфизм групп Ли и $U\subset V$ инвариантно относительно $f(G)$, то U инвариантно относительно $d_ef(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Для любого $X\in\mathfrak{g}$ рассмотрим путь $g(t)\in G$ такой, что $g(0)=E,\dot g(0)=X$. Мы знаем, что $g(t)\cdot u\in U$ для любого $u\in U$. Это означает, что $d_e(f)(X)=\lim_{t\to0}\dfrac{g(t)\cdot u-u}{t}\cdot u\in U$, так как U является векторным пространством. □

Применя лемму к присоединённому представлению, получаем требуемое. □

3.2. **Примеры алгебр Ли.**

Пример 3.8. Касательное пространство в единице к группе Ли с операцией коммутатора является алгеброй Ли.

Пример 3.9. Любая ассоциативная алгебра A с операцией коммутатора, определённой по правилу $[x,y]=xy-yx$ является алгеброй Ли. В случае конечномерной алгебры A это пример алгебры Ли группы Ли, см. задачи.

Пример 3.10. Напомним, что дифференцирование алгебры A – это линейное отображение $\delta : A \to A$ такое, что

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \forall\, a, b \in A.$$

Дифференцирования любой, не обязательно ассоциативной, алгебры образуют алгебру Ли с операцией

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$$

Действительно, прямая проверка показывает, что

$$[\delta_1, \delta_2](ab) = [\delta_1, \delta_2](a)b + a[\delta_1, \delta_2](b).$$

Мы будем обозначать $\mathrm{Der}A$ алгебру Ли всех дифференцирований алгебры A. В случае, когда алгебра A конечномерна, эта алгебра Ли также является касательной алгеброй группы Ли:

Теорема 3.11. Пусть A — некоторая (не обязательно ассоциативная) конечномерная алгебра. Тогда

(1) Группа автоморфизмов $Aut(A)$ алгебры A является подгруппой Ли группы $GL(A)$;
(2) Алгебра Ли группы $Aut(A)$ совпадает с $Der(A)$ — дифференцированиями алгебры A.

Доказательство. 1) Заметим, что структура конечномерной алгебры задаётся отображением $S\colon A \otimes A \to A$, то есть элементом пространства $Hom(A \otimes A, A) \simeq A^* \otimes A^* \otimes A$.

Автоморфизм алгебры — это такое невырожденное преобразование ψ алгебры A, что $\psi(S(x, y)) = S(\psi(x), \psi(y))$.

На пространстве A группа $GL(A)$ действует тавтологически, на A^* зададим действие по правилу $gf(a) := f(g^{-1}a)$, а на $V \otimes W$ как $g \cdot (v \otimes w) = gv \otimes gw$. Очевидно, что все определённые действия гладкие.

Условие на автоморфизм это в точности условие сохранения соответствующего S тензора в $A^* \otimes A^* \otimes A$. Иначе говоря, определённое нами действие на $A^* \otimes A^* \otimes A$ определяет действие на $Hom(A \otimes A, A)$ по правилу $(g \cdot S)(v_1, v_2) := g \cdot (S(g^{-1}v_1, g^{-1}v_2))$. А значит, если $g \cdot S = S$, то $g(S(v_1, v_2)) = S(gv_1, gv_2)$, т.е. g — автоморфизм. Тогда $Aut(A)$ подгруппа Ли $GL(A)$ как стабилизатор S при действии $GL(A)$ на $A^* \otimes A^* \otimes A$.

2) Пусть $g(\varepsilon) = E + t\xi + \ldots$ — кривая в окрестности единицы группы $Aut(A)$, $\xi \in M_n(A)$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеем, что $g(a)g(b) = g(ab)$. Это задаёт условия на ξ:

$$(a + t\xi(a) + o(\varepsilon))(b + t\xi(b) + o(t)) = ab + t(\xi(a)b + a\xi(b)) + o(t) = ab + t\xi(ab) + o(t)$$

откуда $\xi(ab) = \xi(a)b + a\xi(b)$, то есть ξ — дифференцирование алгебры A.

С другой стороны, для любой ξ рассмотрим $\exp(t\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\xi)^k}{k!}$. Известно, что $\exp(x)$ сходится для любой матрицы $x \in M_n(A)$ и что $\exp(x) \in GL_n(A)$. Утверждается, что если ξ — дифференцирование A, то $\exp(t\xi)$ — автоморфизм для любого t. Действительно, легко доказать по индукции, что если ξ - дифференцирование, то

$$\xi^k(ab) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \xi^i(a)\xi^{k-i}(b).$$

Тогда

$$\exp(t\xi)(ab) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \xi^i(a)\xi^{k-i}(b) \right) t^k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\xi^i(a)}{i!} t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^j(b)}{j!} t^j \right) =$$
$$= \exp(t\xi)(a) \exp(t\xi)(b)$$

Таким образом, мы доказали, что любое дифференцирование является касательным вектором к некоторому автоморфизму. $\square$

Замечание 3.12. Если группа Ли действует автоморфизмами конечномерной алгебры, то алгебра Ли действует дифференцированиями этой алгебры. В частности, если применить это к присоединённому представлению группы Ли, это даёт ещё одно доказательство тождества Якоби в алгебре Ли.

Пример 3.13. $Aut(M_n(\Bbbk)) = PGL_n(\Bbbk)$.

Действительно, $\forall\, g \in GL_n(\Bbbk)$ преобразование $M_n(\Bbbk) \to M_n(\Bbbk), A \mapsto gAg^{-1}$ является автоморфизмом $M_n(\Bbbk)$. С другой стороны, любой простой модуль над $M_n(\Bbbk)$ изоморфен $V \simeq \Bbbk^n$ со стандартным действием матриц на вектора в стандартном базисе. Отсюда следует, что любой автоморфизм ψ алгебры $M_n(\Bbbk)$ определяет простой модуль $V' : A \cdot v = \psi(A)v$, изоморфный стандартному. Любой изоморфизм $V \simeq V'$ — это невырожденный линейный оператор $C : V \to V$, причем следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "C"] \arrow[d, "A"'] & V \arrow[d, "\psi(A)"] \\
V \arrow[r, "C"] & V
\end{tikzcd}$$

а значит $\psi(A) = CAC^{-1}$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in M_n(\Bbbk)$.

Таким образом имеем сюръективный гомоморфизм групп Ли $GL_n(\Bbbk) \to Aut(M_n(\Bbbk))$ (гладкость очевидна в координатах). Ядро состоит из скалярных матриц, следовательно, по теореме о гомоморфизме имеем

$$Aut(M_n(\Bbbk)) \simeq GL_n(\Bbbk)/\Bbbk^* = PGL_n(\Bbbk).$$

В частности $PGL_n(\Bbbk)$ является линейной группой Ли.

3.3. **Алгебра Ли векторных полей.**

Пример 3.14. Напомним, что одно из возможных определений векторного поля на многообразии M – это дифференцирование алгебры гладких функций $C^\infty(M)$. Тогда из примера 3.10 следует, что векторные поля на многообразии образуют (бесконечномерную) алгебру Ли. По некоторым причинам, которые будут ясны далее, мы определим коммутатор диференцирований $\delta_1, \delta_2 \in Der(C^\infty(M))$ через

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_2 \circ \delta_1 - \delta_1 \circ \delta_2,$$

то есть с противоположным знаком относительно примера 3.10.

В частности, если $M = \mathbb{R}^n$, то известно, что любое дифференцирование алгебры функций на $\mathbb{R}^n$ имеет вид $\sum_{i=1}^n f_i \partial_{x_i}$, где $f_i, i = 1, \ldots, n$ – некоторый набор гладких функций. Коммутатор векторных полей имеет в этом случае вид

$$\left[\sum_{i=1}^n f_i \partial_{x_i}, \sum_{j=1}^n g_j \partial_{x_j}\right] = \sum_{i,j=1}^n \left(-f_j \partial_{x_j}(g_i) + g_j \partial_{x_j} f_i\right) \partial_{x_i}$$

Такими же формулами задаётся коммутатор векторных полей на многообразии при выборе карты в окрестности произвольной точки.

Рассмотрим действие α группы Ли G на многообразии M. Обозначим через $Diff(M)$ группу диффеоморфизмов многообразия M. Действие задает гомоморфизм групп

$$\psi : G \to Diff(M)$$

Несмотря на то, что группа $Diff(M)$ не является группой Ли, естественно считать, что её алгебра Ли – это алгебра Ли векторных полей $Vect(M)$.

Предложение 3.15. Действие $\alpha : G \times X \to X$ задает гомоморфизм алгебр Ли

$$\mathfrak{g} \to Vect(X),\ \mathfrak{g} \ni \xi \mapsto v_\xi \in Vect(X),$$

где $v_\xi(x) := d_e\alpha_x(\xi)$.

Определение 3.16. Векторные поля вида v_ξ называются *полями скоростей* действия группы Ли G на многообразии X.

Доказательство. Выберем в окрестности точки $x \in X$ координаты $x_1, \dots, x_m$ так, чтобы точка x была в начале координат. Выберем, как и раньше, координаты $y_1, \dots, y_n$ в окрестности точки $e \in G$ так, чтобы точка e была в начале координат. Используя равенство $\alpha(0, \overline{x}) = \overline{x}$, в выбранных координатах действие $\alpha : G \times X \to X$ с точностью до кубических членов в ряде Тейлора записывается так:

$$\alpha(\overline{y}, \overline{x}) = \overline{x} + L(\overline{y}) + B(\overline{x}, \overline{y}) + Q(\overline{y}) + o((|x| + |y|)^2),$$

где L – линейное отображение, B – билинейное, а Q – квадратичное. Пусть l_i^r, b_i^{jr} и $q_i^{rs} = q_i^{sr}$ (где $i, j = 1, \dots, m$ и $r, s = 1, \dots, n$) – компоненты отображений L, B и Q соответственно, т.е.

$$L(\overline{y}) = \left(\sum_{r=1}^{n} l_1^r y_r, \dots, \sum_{r=1}^{n} l_m^r y_r \right);$$

$$B(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_1^{jr} x_j y_r, \dots, \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_m^{jr} x_j y_r \right);$$

Пусть $\xi \in T_e G$ – касательный вектор в точке $e \in G$, $\xi = \sum \xi_i \partial_{y_i}$. Тогда

$$v_\xi(\overline{x}) = d_{\overline{0}} \alpha(\cdot, \overline{x})(\xi) = \left(\sum_{r=1}^{n} l_1^r \xi_r, \dots, \sum_{r=1}^{n} l_m^r \xi_r \right) + \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_1^{jr} x_j \xi_r, \dots, \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_m^{jr} x_j \xi_r \right) =$$
$$= L(\xi) + B(\overline{x}, \xi) + o(|x|^2).$$

Пусть $\eta = \sum \eta_i \partial_{y_i}$ – еще один касательный вектор в точке $e \in G$. Векторные поля v_ξ и v_η с точностью до членов порядка ≥ 2 по $\overline{x}$, которые не влияют на вычисление коммутатора векторных полей в нуле, можно записать как операторы дифференцирования алгебры $C^\infty(X)$ следующим образом:

$$v_\xi = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{n} l_i^r \xi_r + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_i^{jr} x_j \xi_r \right) \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad v_\eta = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{n} l_i^r \eta_r + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} b_i^{jr} x_j \eta_r \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Вычислим $[v_\xi, v_\eta](\overline{0})$ двумя способами: с одной стороны, имеем

$$[v_\xi, v_\eta] = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r,s=1}^{n} l_j^r \xi_r b_i^{js} \eta_s \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r,s=1}^{n} l_j^r \eta_r b_i^{js} \xi_s \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + o(|x|) =$$
$$= -B(L(\xi), \eta) + B(L(\eta), \xi) + o(|x|),$$

и, следовательно, $[v_\xi, v_\eta](\overline{0}) = -B(L(\xi), \eta) + B(L(\eta), \xi)$. С другой стороны, так как α – действие группы G на многообразии X, то

$$\alpha \circ (m \times \mathrm{id}) = \alpha \circ (\mathrm{id} \times \alpha) : G \times G \times X \to X.$$

Пусть $\overline{y}, \overline{z}$ – координаты на группе, а $\overline{x}$ – координаты на X. Тогда правая часть этого равенства в координатах выглядит так:

$$\overline{x} + L(\overline{y} + \overline{z}) + B(\overline{x}, \overline{y}) + B(\overline{x}, \overline{z}) + B(L(\overline{z}), \overline{y}) + Q(\overline{y}) + Q(\overline{z}) + \underline{O}(|x|^2, |y|^2, |z|^2, |x| \cdot |y| \cdot |z|);$$

левая часть в координатах записывается как

$$\overline{x} + L(\overline{y} + \overline{z}) + B(\overline{x}, \overline{y}) + B(\overline{x}, \overline{z}) + L(\beta(\overline{y}, \overline{z})) + Q(\overline{y} + \overline{z}) + \underline{O}(|x|^2, |y|^2, |z|^2, |x| \cdot |y| \cdot |z|).$$

Здесь через β мы обозначили билинейную часть умножения в группе. Отсюда получаем, что $L(\beta(\overline{y}, \overline{z})) = B(L(\overline{z}), \overline{y}) - Q(\overline{y} + \overline{z}) + Q(\overline{y}) + Q(\overline{z})$, и следовательно

$$-B(L(\overline{y}), \overline{z}) + B(L(\overline{z}), \overline{y}) = L(\gamma(\overline{y}, \overline{z}))$$

для любых $\overline{y}, \overline{z}$. В частности

$$-B(L(\xi), \eta) + B(L(\eta), \xi) = L(\gamma(\xi, \eta)).$$

Таким образом, имеем $[v_\xi, v_\eta](\overline{0}) = v_{[\xi,\eta]}(\overline{0})$. Изначально точка x была выбрана произвольно, отсюда получаем требуемое. $\square$

Пример 3.17. Группа Ли $SO(2) \simeq S^1$ действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ поворотами. Этому действию соответствует гомоморфизм алгебр Ли:

$$\mathbb{R} \to Vect(\mathbb{R}^2)$$

Он задается образом единицы, которые легко подсчитать. Пусть $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$v_1(x) = d_e\alpha_x(1) = \frac{d}{dt}|_{t=0}[\left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right).$$

Отождествив касательное пространство к $\mathbb{R}^2$ в каждой точке с дифференцированиями алгебры функций, получим, что

$$1 \mapsto -y\partial_x + x\partial_y$$

Термин "поле скоростей" объясняется следующим наблюдением. Можно представлять себе точки плоскости $\mathbb{R}^2$ движущимися под действием одномерной группы S^1: положение точки $x = (a, b)$ через время t есть $\left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$. Тогда значение поля скоростей v_1 в точке x есть скорость этой точки.

Если группа Ли G многомерна, то ее действие на многообразии X задает много разных однопараметрических семейств диффеоморфизмов многообразия X, зависящих от касательного направления в единице группы G (то есть элемента алгебры Ли $\mathfrak{g}$). А именно, касательному вектору $\xi \in \mathfrak{g} = T_eG$ в точке $e \in G$ сопоставим гладкую кривую $g(t) \in G, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ с данным касательным вектором. Действие группы Ли G на многообразии X задает однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $x \mapsto g(t)x$. При этом, скорость точки x при $t = 0$ при таком движении будет как раз соответствующим полем скоростей $v_\xi(x)$.

Замечание 3.18. Отметим, что если мы бы определили коммутатор векторных полей стандартным образом, то действие группы задало бы антигомоморфизм алгебр Ли.

3.4. **Левоинвариантные векторные поля.** Рассмотрим действие G на себе умножениями справа: $g \to R_{g^{-1}}$. Тогда получим гомоморфизм алгебр Ли

$$\varphi : \mathfrak{g} \to Vect(G)$$

Отметим, что в этом случае $\alpha_x = L_x \circ S$, то есть $\varphi(\xi)(x) = d_e(L_x \circ S)(\xi) = -d_eL_x(\xi)$. Здесь S – отображение взятия обратного элемента в группе G.

Определение 3.19. Векторное поле v на группе Ли G называется левоинвариантным, если $L_g^*v = v$.

Предложение 3.20. Отображение φ – инъективно, а его образ совпадает с левоинвариантными векторными полями на группе G. Таким образом алгебра Ли группы Ли G изоморфна алгебре Ли левоинвариантных векторных полей на G.

Доказательство. Действительно, отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi)(e)$ совпадает с $-\mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, откуда следует инъективность отображения φ. Покажем, что векторное поле $\varphi(\xi)$ – левоинвариантно. Действительно,

$$\varphi(\xi)(gh) = -d_eL_{gh}(\xi) = d_hL_g(-d_eL_h(\xi)) = d_hL_g(\varphi(\xi)(h)).$$

Поскольку левоинвариантное векторное поле однозначно определяется своим значением в единице группы, отображение φ осуществляет изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей на группе Ли G. $\square$

3.5. **Однопараметрические подгруппы.** Пусть G – группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G.

Теорема 3.21. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ существует единственный гомоморфизм вещественных групп Ли
$$\gamma_x : \mathbb{R} \to G,$$
такой, что $\dot{\gamma}_x(0) = x$.

Образ γ_x называется *однопараметрической подгруппой.* Таким образом, для любой одномерной подалгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ существует одномерная вещественная виртуальная подгруппа Ли, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{h}$. Рассмотрим несколько примеров однопараметрических подгрупп Ли.

Примеры. (1) Для групп Ли $\mathbb{R}^n$ и $(S^1)^n$ их алгебра Ли – это абелева алгебра Ли $\mathbb{R}^n$. Если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то соответствующие гомоморфизмы имеют вид
$$\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto tx,$$
$$\gamma_x : \mathbb{R} \to (S^1)^n, t \mapsto (e^{2\pi i t x_1}, \ldots, e^{2\pi t x_n}).$$

(2) Для группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$ алгебра Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ состоит из кососимметрических 3×3 матриц. Для базисных матриц
$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
соответствующие гомоморфизмы имеют вид
$$\gamma_{J_1} : \mathbb{R} \to SO_3(\mathbb{R}), t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_{J_2} : \mathbb{R} \to SO_3(\mathbb{R}), t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$
$$\gamma_{J_3} : \mathbb{R} \to SO_3(\mathbb{R}), t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(3) Пусть $x \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Для группы Ли $GL_n(\Bbbk)$ отображение
$$\gamma_x : \mathbb{R} \to GL_n(\Bbbk), t \mapsto \exp(tx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!},$$
является гомоморфизмом групп Ли, что следует из свойств экспоненциального ряда (абсолютная сходимость, почленное дифференцирование ряда).

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Определим левоинвариантное векторное поле v_x на G по правилу $v_x(g) = d_e L_g(x)$. По теореме о существовании и единственности из теории дифференциальных уравнений, если M – многообразие, $p \in M$ и $v(m), m \in M$ – векторное поле на M, то существует единственное гладкое отображение $\varphi : I \to M, \varphi(0) = p$ такое, что
$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = v(\varphi(t))$$
где I некоторый интервал, причём длина I максимальна.

Применим теорему, положив $M = G, v(g) = v_x(g), p = e$. Пусть $\gamma_x(t)$ – решение системы на интервале $(-a, b)$, причём $(-a, b)$ – максимальный интервал, на котором решение определено.

Лемма 3.22. Пусть $t, s, t+s \in (-a, b)$. Тогда

$$\gamma_x(t+s) = \gamma_x(t) \cdot \gamma_x(s).$$

Доказательство. Зафиксируем $s \in (-a, b)$ и рассмотрим отображения $\alpha(t) := \gamma_x(s) \cdot \gamma_x(t)$ и $\beta(t) := \gamma_x(s+t)$. Отображения α и β определены для достаточно малых t. Заметим, что оба эти отображения являются решением задачи Коши

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = v_x(\varphi(t))$$
$$\varphi(0) = \gamma_x(s)$$

Действительно, $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma_x(s)$, а также используя левоинвариантность в первом равенстве, получаем

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = d_{\gamma_x(t)} L_{\gamma_x(s)} v(\gamma_x(t)) = v_x(\gamma_x(s) \cdot \gamma_x(t));$$
$$\frac{d\beta(t)}{dt} = v_x(\gamma_x(t+s)).$$

Это означает, что $\alpha(t) = \beta(t)$ для достаточно малых t, то есть

$$\gamma_x(t+s) = \gamma_x(t) \cdot \gamma_x(s).$$

□

Покажем теперь, что на самом деле $(-a, b) = \mathbb{R}$. Для этого достаточно определить решение на интервале, строго содержащим $(-a, b)$. Зафиксируем $c \in (0, b)$ и положим

$$\tilde{\gamma}_x(t) = \gamma_x(c) \cdot \gamma_x(t-c).$$

По доказанному выше это будет решение на интервале $(-a+c, b+c)$ которое совпадает с исходным на пересечении. Это означает что на самом деле решение определено на большем интервале $(-a, b+c)$, что является противоречием с максимальностью I. □

3.6. **Экспоненциальное отображение.**

Определение 3.23. Эксопоненциальным отображением называется отображение

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, x \mapsto \gamma_x(1)$$

Примеры.
(1) $G = \mathbb{k}$. Тогда $\exp(x) = \mathrm{id}$.
(2) Пусть $G = \mathbb{R}^\times_{>0}$ или $\mathbb{C}^\times$. Тогда $\exp(x) = e^x$.
(3) Пусть $G = GL_n(\mathbb{k})$. Пусть $x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$. Тогда $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

Теорема 3.24.
(1) Отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$ является гладким как отображение вещественных многообразий;
(2) $d_0 \exp = \mathrm{id}$;
(3) $\gamma_x(t) = \exp(tx)$;
(4) Отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$ осуществляет диффеоморфизм некоторой окрестности нуля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и некоторой окрестности единицы группы Ли G;
(5) (Функториальность) Если $\varphi : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\varphi"] & G_2 \\ \mathfrak{g}_1 \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d_e\varphi"] & \mathfrak{g}_2 \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

(6) Пусть $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp(t(X+Y) + t^2 Z(t)),$$

где $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathfrak{g}$ – некоторая гладкая функция.

(7) Если $[\xi, \eta] = 0$, то $\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \cdot \exp(\eta)$;

Доказательство. 1) Следует из теоремы о гладкой зависимости решения от начальных условий (**??**).

2) Заметим, что $\gamma_{tx}(s) = \gamma_x(ts)$, что следует из единственности однопараметрической подгруппы. Тогда

$$d_0 \exp(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_{tx}(1) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_x(t) = x.$$

3) $\exp(tx) = \gamma_{tx}(1) = \gamma_x(t)$.

4) Следует из пункта 2) и теоремы об обратной функции.

5)

$$\frac{d}{dt}\varphi(\exp(tx))|_{t=0} = d_e \exp \circ d_e\varphi = d_e\varphi(x)$$

и $\varphi(\exp(tx))$ является однопараметрической подгруппой, следовательно, совпадает с $\gamma_{d_e\varphi(x)}(t)$. Таким образом подставив $t = 1$ получаем

$$\varphi(\exp(x)) = \gamma_{d_e\varphi(x)}(1) = \exp(d_e\varphi(x))$$

6) Определим $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathfrak{g}$ по формуле $t \mapsto \exp^{-1}(\exp(tX)\exp(tY))$. Из того, что exp локальный диффеоморфизм следует, что существует $\varepsilon > 0$, что Φ – гладкое. При этом $\Phi(0) = 0$ и

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(\Phi(t)).$$

Более того, так как $\Phi = m \circ (\exp \times \exp) \circ (i_X \times i_Y)$, где $i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathfrak{g}, X \mapsto tX$ то $d_0\Phi(X, Y) = X + Y$. Отсюда следует требуемое.

7) Из функториальности экспоненты следует, что

$$\mathrm{Ad}_{\exp(\eta)}(\xi) = \exp(\mathrm{ad}(\eta))(\xi) = \xi.$$

Так же из функториальности экспоненты для автоморфизма C_g следует, что $g\exp(\xi)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_g \xi)$ для любого $g \in G$. Пусть $g = \exp(\eta)$. Тогда получаем

$$\exp(\eta)\exp(\xi)\exp(\eta)^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_{\exp(\eta)} \xi) = \exp \xi.$$

Таким образом, $\exp(\xi)$ коммутирует с $\exp(\eta)$. Пусть $\gamma(t) = \exp(t\xi)\cdot\exp(t\eta)$ и докажем, что $\gamma(t)$ – однопараметрическая подгруппа. Действительно,

$$\gamma(t+s) = \exp(t+s)\xi \cdot \exp(t+s)\eta = \exp t\xi \exp s\xi \exp t\eta \exp s\eta = \\ = \exp t\xi \exp t\eta \exp s\xi \exp s\eta = \gamma(t) \cdot \gamma(s)$$

Какой касательный вектор соответствует $\gamma(t)$?

Лемма 3.25. Пусть $\alpha(t), \beta(t) \in G$ – пути с касательными векторами ξ, η. Тогда $\alpha(t) \cdot \beta(t)$ – путь с касательным вектором $\xi + \eta$.

Доказательство. Действительно, $d_{(e,e)}m(\xi, \eta) = \xi + \eta$ для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Положим

$$\gamma : \mathbb{R} \to G \times G, t \to (\alpha(t), \beta(t))$$

Отметим, что $d_0\gamma : \mathbb{R} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, t \to (t\xi, t\eta)$. Тогда

$$d_0(m \circ \gamma) = d_{(e,e)}m \circ d_0\gamma, t \mapsto t(\xi + \eta)$$

□

Пользуясь леммой, получаем, что $\gamma(t)$ – однопараметрическая подгруппа, с касательным вектором $\xi + \eta$. Из единственности однопараметрической подгруппы следует, что $\gamma(t) = \exp(t(\xi + \eta))$, откуда получаем требуемое равенство при $t = 1$. □

Следствие 3.26. (1) Если H – подгруппа Ли группы $GL_n(\Bbbk)$, то экспонента для H задаётся стандартным рядом, что следует из функториальности экспоненты.
(2) Пусть $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ – присоединённое представление группы Ли G. Применяя функториальность экспоненты, получаем, что $\mathrm{Ad}(\exp \xi) = \exp \mathrm{ad}(\xi)$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}$.

3.7. **Гомоморфизмы из связной группы Ли.**

Теорема 3.27. Пусть G_1 – связная группа Ли. Тогда отображение

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2), \varphi \mapsto d_e\varphi$$

является вложением. Иными словами, гомоморфизм из связной группы Ли однозначно определяется своим дифференциалом в единице.

Доказательство. Действительно, имея гомоморфизм алгебр Ли, по функториальности можно восстановить гомоморфизм групп в окрестности единицы, а, так как связная группа Ли порождается окрестностью единицы, то и весь гомоморфизм. □

Замечание. Это соответствие, вообще говоря, не сюръективно. Например, если $G_1 = S^1, G_2 = \mathbb{R}$, то $\mathrm{Hom}(S^1, \mathbb{R})$ – одноэлементно, а $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.