Топология-3

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Независимый московский университет

Последняя редакция: 10 марта 2025 г.

Содержание

Предисловие

Третья часть курса алгебраической топологии. Включает двойственность Пуанкаре и теорию характеристических классов.

Данный текст доступен на странице Т. Е. Панова на сайте кафедры высшей геометрии и топологии: `http://higeom.math.msu.su/people/taras/`

Список литературы

[БТ] Р. Ботт, Л. В. Ту. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии.* Москва, Наука, 1989.

[ДНФ] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения.* Москва, Наука, 1986.

[Ле] С. Ленг. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* Москва, «Мир», 1967.

[МС] Дж. Милнор, Дж. Сташефф. *Характеристические классы,* с приложением работы Дж. Манкрса «Элементарная дифференциальная топология». Москва, Мир, 1979.

[Ми] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их применения.* Москва, Наука, 1984.

[Топ1] Т. Е. Панов. *Топология-1. Курс лекций.* `http://higeom.math.msu.su/people/taras/#teaching`

[Топ2] Т. Е. Панов. *Топология-2. Курс лекций.* `http://higeom.math.msu.su/people/taras/#teaching`

[Ст] Р. Стонг. *Заметки по теории кобордизмов.* Москва, Мир, 1973.

[ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* Москва, Наука, 1989.

[Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Москва, МЦНМО, 2011.

[Ha] A. Hatcher. *Vector bundles and K-theory.* `http://math.cornell.edu/~hatcher/`

1. Двойственность Пуанкаре

Для ориентируемого замкнутого n-мерного многообразия M имеют место изоморфизмы двойственности Пуанкаре $H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$. Для коэффициентов в $\mathbb{Z}_2$ изоморфизмы $H^k(M;\mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(M;\mathbb{Z}_2)$ имеют место без предположения об ориентируемости. Мы также докажем изоморфизмы двойственности в более общей ситуации: для когомологий с компактными носителями некомпактных многообразий и для многообразий с краем.

1.1. Гладкие и топологические многообразия. Топологическим *многообразием* размерности n называется такое хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, что для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству V в $\mathbb{R}^n$. Компактные многообразия традиционно называют *замкнутыми*.

Гладким атласом на n-мерном многообразии M называется открытое покрытие $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ многообразия M, в котором для каждого множества U_α фиксирован гомеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha$, называемый *картой*, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, и на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ *отображения замены координат*

$$\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$.

Выбор гладкого атласа на многообразии называется *гладкой структурой*, а многообразие с гладким атласом — *гладким* (или *дифференцируемым*) *многообразием*.

Примерами гладких многообразий являются $\mathbb{R}^n$, сферы S^n, проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$, классические двумерные поверхности. Произведение гладких многообразий снова является гладким многообразием.

Не являются многообразиями графы с вершинами степени $\geqslant 2$ и бесконечномерные клеточные пространства типа S^∞, $\mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{C}P^\infty$. Конус, надстройка, смэш-произведение и джойн многообразий, как правило, не являются многообразиями.

1.2. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс. Пусть X — топологическое пространство. Группа $H_n(X, X\setminus\{x\})$ называется *n-й группой локальных гомологий* пространства X в точке x.

Предложение 1.1. *Пусть M — топологическое n-мерное многообразие. Тогда $H_n(M, M\setminus\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_i(M, M\setminus\{x\}) = 0$ при $i \neq n$ для любой точки $x \in M$.*

Доказательство. Имеем

$$H_i(M, M\setminus\{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}),$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, а второй — из точной последовательности пары. Теперь утверждение следует из вычисления гомологий сфер. □

Локальная ориентация n-мерного многообразия M в точке x — это выбор одной из двух образующих группы локальных гомологий $H_n(M, M\setminus\{x\}) \cong \mathbb{Z}$.

Выберем локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M\setminus\{x\})$ в каждой точке $x \in M$. Такой выбор называется *согласованным*, если для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность B, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$, что для каждой точки $y \in B$ образующие μ_x и μ_y переходят друг в друга при изоморфизмах

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \xleftarrow{\cong} H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{y\}),$$

индуцированных вложениями $M \setminus B \to M \setminus \{x\}$ и $M \setminus B \to M \setminus \{y\}$. Многообразие M называется *ориентируемым*, если существует согласованный выбор локальных ориентаций всех его точек. Такой выбор называется *ориентацией* многообразия M. Если многообразие M связно и ориентируемо, то у него есть в точности две ориентации.

Рассмотрим множество, состоящее из пар (x, μ_x):

$$\widetilde{M} = \{(x, \mu_x)\colon x \in M,\ \mu_x \text{ — локальная ориентация в точке } x \in M\}.$$

Для каждого подмножества $B \subset M$, гомеоморфного открытому шару в $\mathbb{R}^n$, и образующей $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B) \cong \mathbb{Z}$ определим подмножество $U(\mu_B) \subset \widetilde{M}$ как

$$U(\mu_B) = \big\{(x, \mu_x)\colon x \in B,\ \mu_B \text{ переходит в } \mu_x \\ \text{при изоморфизме } H_n(M, M \setminus B) \to H_n(M, M \setminus \{x\})\big\}.$$

Введём на $\widetilde{M}$ топологию, базу которой образуют подмножества $U(\mu_B)$. Тогда из этой конструкции и определения ориентируемости вытекает следующее.

Предложение 1.2. *Пусть M связно. Тогда*

а) *M ориентируемо в том и только том случае, когда $\widetilde{M}$ имеет две компоненты связности, т. е. $\widetilde{M} = M \sqcup M$;*

б) *если M не ориентируемо, то $\widetilde{M}$ — связное ориентируемое многообразие, а проекция $\widetilde{M} \to M$, $(x, \mu_x) \mapsto x$, является двулистным накрытием.*

Двулистное накрытие $\widetilde{M} \to M$ неориентируемого многообразия M называется *ориентирующим накрытием*.

Следствие 1.3. *Односвязное многообразие ориентируемо.*

Также M ориентируемо, если в $\pi_1(M)$ нет подгрупп индекса 2.

Рассматривая группы гомологий с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей, получим определение *R-ориентируемого* многообразия. (Образующей в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$ называется любой обратимый элемент кольца R.) Любое многообразие $\mathbb{Z}_2$-ориентируемо, так как образующая в $\mathbb{Z}_2$ единственна. Более того, легко видеть, что ориентируемое многообразие R-ориентируемо для любого R, а неориентируемое многообразие R-ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R (задача). Поэтому интерес представляют случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$.

Лемма 1.4. *Пусть M — многообразие размерности n и $A \subset M$ — компактное подмножество. Тогда для коммутативного кольца R с единицей*

а) *элемент $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$ равен нулю в том и только том случае, когда его образ α_x в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ равен нулю для любой точки $x \in A$;*

б) *если выбраны согласованные локальные ориентации $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для всех $x \in A$, то существует единственный элемент $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$, который отображается в μ_x при гомоморфизме $r_A\colon H_n(M, M \setminus A; R) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для любой точки $x \in A$;*

в) *$H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. Доказательство леммы разобьём на несколько шагов. Будем опускать коэффициенты R в обозначениях групп гомологий.

Шаг 1. Если лемма верна для A, B и $A\cap B$, то она верна и для $A\cup B$. Рассмотрим точную последовательность Майера–Виеториса для пар:

$$0 \to H_n(M, M\setminus(A\cup B)) \xrightarrow{\varphi} H_n(M, M\setminus A)\oplus H_n(M, M\setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(M, M\setminus(A\cap B)).$$

Слева стоит 0 так как $H_{n+1}(M, M\setminus(A\cap B)) = 0$ по предположению. Кроме того, группы $H_i(M, M\setminus(A\cup B))$ при $i > n$ стоят между двумя нулевыми группами в последовательности, поэтому они равны нулю, что доказывает утверждение в). Утверждение а) для $A\cup B$ следует из утверждения а) для A и B в силу инъективности φ.

Для доказательства утверждения б) для $A\cup B$ рассмотрим элементы $\mu_A \in H_n(M, M\setminus A)$ и $\mu_B \in H_n(M, M\setminus B; R)$, которые существуют по предположению. При отображении $H_n(M, M\setminus A) \to H_n(M, M\setminus(A\cap B))$ элемент μ_A переходит в элемент, удовлетворяющий условию из утверждения б) для $A\cap B$, т. е. в $\mu_{A\cap B}$, в силу единственности такого элемента. Аналогично μ_B переходит в $\mu_{A\cap B}$ при отображении $H_n(M, M\setminus B) \to H_n(M, M\setminus(A\cap B))$. Следовательно, отображение ψ из точной последовательности Майера–Виеториса переводит элемент $(\mu_A, -\mu_B)$ в нуль. Поэтому $(\mu_A, -\mu_B) = \varphi(\mu_{A\cup B})$ для некоторого $\mu_{A\cup B} \in H_n(M, M\setminus(A\cup B))$. Этот элемент $\mu_{A\cup B}$ удовлетворяет условию из утверждения б) для $A\cup B$, а его единственность следует из инъективности φ.

Шаг 2. Сводим лемму к случаю, когда M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ (одна карта). Компактное подмножество A содержится в конечном объединении карт некоторого атласа M, т. е. $A \subset U_1\cup\ldots\cup U_k$. Будем вести индукцию по k. Положим $A_i = U_i\cap A$ и применим утверждение предыдущего шага к $A_1\cup\ldots\cup A_{k-1}$ и A_k. В результате утверждение сводится к случаю $k = 1$, т. е. к случаю одной карты.

Шаг 3. $A = K$ — конечный симплициальный комплекс. Если $A = \Delta^k$ — симплекс, то $\mathbb{R}^n\setminus A \to \mathbb{R}^n\setminus\{x\}$ — деформационная ретракция и $r_A\colon H_i(M, M\setminus A) \to H_i(M, M\setminus\{x\})$ — изоморфизм для $x\in A$. Далее лемма для K сводится к случаю одного симплекса по индукции при помощи утверждения из шага 1.

Шаг 4. $A\subset\mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Пусть элемент $\alpha = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus A)$ представлен относительным циклом a. Тогда $\partial a \subset C$ для некоторого компакта $C\in\mathbb{R}^n\setminus A$. Построим симплициальный комплекс K, для которого $A\subset K$ и $K\cap C = \varnothing$. (Покроем A симплексом, перейдём к кратному барицентрическому подразделению с диаметром симплексов меньше расстояния между A и C и оставим только n-симплексы, пересекающие A.) Тогда a задаёт класс $\alpha_K = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus K)$, который отображается в данный элемент α при гомоморфизме $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus K) \to H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus A)$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$ при $i > n$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus A) = 0$ при $i > n$, что доказывает третье утверждение леммы.

Пусть теперь $i = n$. Предположим, что $\alpha_x = 0$ для любой точки $x\in A$. Тогда и $\alpha_x = 0$ для любой точки $x\in K$, так как K — объединение n-симплексов, пересекающих A, а $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\Delta^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x\})$ — изоморфизм для $x\in\Delta^n$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$, а значит и $\alpha = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы и единственность во втором утверждении.

Для доказательства существования продолжим согласованные ориентации μ_x, $x\in A$, на симплекс $\Delta^n \supset A$. Для Δ^n существование элемента $\mu_{\Delta^n} \in H_n(M, M\setminus\Delta^n)$

очевидно. Тогда искомый элемент μ_A есть образ элемента μ_{Δ^n} при гомоморфизме $H_n(M, M \setminus \Delta^n) \to H_n(M, M \setminus A)$. □

Если многообразие M замкнуто (компактно), то мы можем положить $A = M$ в лемме 1.4. Тогда из утверждения б) получаем, что если M замкнуто и ориентировано, т. е. согласованно выбраны образующие $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, то существует единственный класс $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$, переходящий в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ для любой точки $x \in M$. Этот класс называется *фундаментальным классом* ориентированного многообразия M и обозначается $[M]$.

Теперь можно сформулировать теорему о связи ориентируемости и старшей группы гомологий для замкнутых связных многообразий M.

Теорема 1.5. *Пусть M — замкнутое связное многообразие размерности n. Тогда*

а) *отображение $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ является изоморфизмом для любой точки $x \in M$;*

б) *если M ориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — изоморфизм для любой точки $x \in M$; если M неориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$;*

в) *$H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. Положим $A = M$ и $R = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$ в лемме 1.4. Утверждение в) вытекает из утверждения в) леммы.

Пусть $x \in M$. Покажем, что для связного многообразия M гомоморфизм $H_n(M; R) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, $\alpha \mapsto \alpha_x$, инъективен. Пусть $\alpha_x = 0$ для некоторого $\alpha \in H_n(M; R)$. Тогда если $y \in M$ — другая точка, содержащаяся вместе с x в окрестности B, гомеоморфной открытому шару, то гомоморфизмы для x и y раскладываются в композицию следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M;R) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus B; R) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \\ & & \downarrow\cong & & \\ & & H_n(M, M \setminus \{y\}; R) & & \end{array}$$

Так как M связно, отсюда следует, что $\alpha_y = 0$ для любой точки $y \in M$. Следовательно, $\alpha = 0$ в силу утверждения а) леммы 1.4.

Если многообразие M является R-ориентируемым, то гомоморфизм $H_n(M; R) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ сюръективен в силу утверждения б) леммы 1.4 (для $A = M$). Это доказывает утверждение а) теоремы (так как M всегда $\mathbb{Z}_2$-ориентируемо) и первую часть утверждения б).

Пусть M неориентируемо. Так как гомоморфизм $H_n(M) \to (M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ инъективен, получаем $H_n(M) \cong 0$ или $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Предположим последнее, и пусть α — образующая. Тогда $\alpha_x = k\mu_x$, где $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а k — положительное целое число. Из приведённой выше диаграммы следует, что k не зависит от x и μ_x можно выбрать согласованно для всех $x \in M$. Это противоречит предположению о неориентируемости многообразия M. Итак, $H_n(M) \cong 0$. □

Таким образом, для замкнутого связного M имеем $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ всегда, а $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ или 0 в зависимости от того, является M ориентируемым или нет, а выбор ориентации на M — это выбор образующей группы $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (фундаментального класса).

Предположим, что замкнутое многообразие M триангулировано или на нём задана структура конечного полусимплициального комплекса с n-мерными симплексами σ_i, $i = 1, \ldots, k$. Тогда каждый $(n-1)$-мерный симплекс τ является гранью в точности двух n-мерных симплексов σ_i и σ_j. Если M ориентируемо, то ориентации симплексов σ_i можно выбрать согласованно. Это означает, что можно выбрать отображения $\sigma_i\colon \Delta^n = [v_0, \ldots, v_n] \to M$ так, что каждый τ входит в $\partial\sigma_i$ и $\partial\sigma_j$ с разными знаками. Тогда $\partial(\sum_{i=1}^k \sigma_i) = 0$ и цикл $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ представляет образующую группы $H_n(M)$ — фундаментальный класс $[M]$. Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ цепь $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ — всегда цикл, представляющий образующую группы $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

1.3. **Степень отображения многообразий.** Пусть $f\colon M \to N$ — отображение связных замкнутых ориентированных n-мерных многообразий с фундаментальными классами $[M]$ и $[N]$. Тогда для $f_*\colon H_n(M;\mathbb{Z}) \to H_n(N;\mathbb{Z})$ имеем $f_*[M] = d[N]$. Целое число d называется *степенью* отображения $f\colon M \to N$.

Предложение 1.6. *Для любого связного замкнутого ориентированного n-мерного многообразия M и любого $d \in \mathbb{Z}$ существует отображение $M \to S^n$ степени d.*

Доказательство. Сначала построим отображение степени 1. Пусть $U \subset M$ — карта, причём $U \cong \mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $M \to M/(M \setminus U) \cong S^n$. Для любой точки $x \in U$ имеем композицию гомоморфизмов $H_n(M) \to H_n(M, M \setminus U) \to H_n(M, M \setminus \{x\})$, при которой $[M]$ переходит в μ_x. Отсюда следует, что образ класса $[M]$ при первом гомоморфизме есть фундаментальный класс $[S^n] \in H_n(S^n) \cong H_n(M, M \setminus \{x\})$, а значит отображение $M \to M/(M \setminus U)$ имеет степень 1. Композиция этого отображения с любым отображением $S^n \to S^n$ степени d даёт отображение $M \to S^n$ степени d. $\square$

1.4. **$\frown$-произведение и изоморфизмы двойственности.** Определим *произведение высечения*, или *$\frown$-произведение*

$$\frown\colon C_p(X;R) \times C^q(X;R) \to C_{p-q}(X;R)$$

для $p \geqslant q$ по формуле

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\ldots,v_p]},$$

где $\sigma\colon [v_0, \ldots, v_p] \to X$ — сингулярный симплекс и $\varphi \in C^q(X;R)$ — коцепь.

Лемма 1.7. $\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^q(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown d\varphi)$.

Доказательство. Непосредственная проверка:

$$\partial\sigma \frown \varphi = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1},\ldots,v_p]} + \sum_{i=q+1}^{p} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\ldots,\widehat{v}_i\ldots,v_p]},$$

$$\sigma \frown d\varphi = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1},\ldots,v_p]},$$

$$\partial(\sigma \frown \varphi) = \sum_{i=q}^{p} (-1)^{i-q} \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\ldots,\widehat{v}_i\ldots,v_p]}. \quad \square$$

Отсюда получаем R-билинейное отображение (*гомологическое $\frown$-произведение)*

$$H_p(X;R) \times H^q(X;R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X;R).$$

Имеются также относительные версии:

$$H_p(X,A;R) \times H^q(X;R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X,A;R),$$

$$H_p(X,A;R) \times H^q(X,A;R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X;R),$$

$$H_p(X,A \cup B;R) \times H^q(X,A;R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X,B;R).$$

Лемма 1.8 (функториальность). *Для $f\colon X \to Y$ отображения в диаграмме*

$$\begin{tikzcd} H_p(X) \times H^q(X) \arrow[r, "\frown"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{p-q}(X) \arrow[d, "f_*"'] \\ H_p(Y) \times H^q(Y) \arrow[r, "\frown"] \arrow[u, "f^*"', shift left=8] & H_{p-q}(Y) \end{tikzcd}$$

удовлетворяют соотношению $f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \frown f^*(\varphi))$.

Доказательство. $f\sigma \frown \varphi = \varphi(f\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]}) f\sigma|_{[v_q,\dots,v_p]}$. □

Теперь мы можем сформулировать теорему об изоморфизмах *двойственности Пуанкаре.*

Теорема 1.9. *Пусть M — замкнутое R-ориентируемое n-мерное многообразие с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M;R)$. Тогда отображение*

$$D\colon H^k(M;R) \to H_{n-k}(M;R), \quad \varphi \mapsto [M] \frown \varphi,$$

является измоморфизмом для любого k.

Доказательство этой теоремы будет аналогично доказательству существования фундаментального класса: с помощью последовательности Майера–Виеториса мы сведём утверждение к случаю $M = \mathbb{R}^n$. Но для этого нам понадобится версия двойственности Пуанкаре для некомпактных многообразий. Она использует понятие когомологий с компактными носителями.

1.5. **Когомологии с компактными носителями.** Для пространства X определим группу i-мерных *сингулярных коцепей с компактными носителями* с коэффициентами в G как подгруппу $C^i_c(X;G)$ в $C^i(X;G)$, состоящую из коцепей, обращающихся в нуль вне некоторого компактного подмножества (зависящего от коцепи):

$$C^i_c(X;G) = \{f\colon C_i(X) \to G\colon f|_{C_*(X\setminus K_f)} = 0 \quad \text{для некоторого компактного } K_f \subset X\}.$$

Коцепное кограничное отображение ограничивается на группы коцепей с компактными носителями: $d\colon C^i_c(X;G) \to C^{i+1}_c(X;G)$. Группы когомологий получаемого коцепного комплекса называются *когомологиями с компактными носителями* и обозначаются $H^i_c(X;G)$. Если само пространство X компактно, то $C^i_c(X;G) = C^i(X;G)$ и $H^i_c(X;G) = H^i(X;G)$.

Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств, то мы имеем мономорфизм $C^i(X, X \setminus K;G) \hookrightarrow C^i(X, X \setminus L;G)$ и $C^i_c(X;G) = \bigcup_{K \subset X} C^i(X, X \setminus K;G)$. Индуцированный гомоморфизм гомологий $H^i(X, X \setminus K;G) \to H^i(X, X \setminus L;G)$ может не быть инъективным. Однако группу $H^i_c(X;G)$ также можно описать через группы $H^i(X, X\setminus K; G)$ при помощи следующей алгебраической конструкции.

Конструкция 1.10 (прямой предел (копредел) групп)**.** Пусть $(P,\leqslant)$ — частично упорядоченное множество. *Диаграммой* абелевых групп, индексированной множеством P, называется такой набор $D=\{G_\alpha\colon \alpha\in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta}\colon G_\alpha\to G_\beta$, что $f_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}$ и $f_{\alpha\gamma}$ есть композиция $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\beta\gamma}$, если $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$.

Пусть $\mathcal{P}$ — категория, объектами которой являются элементы $\alpha\in P$, и между α и β имеется единственный морфизм, если $\alpha\leqslant\beta$. Тогда диаграмма — это (ковариантный) функтор $D\colon\mathcal{P}\to\mathcal{AB}$, $\alpha\mapsto G_\alpha$, из $\mathcal{P}$ в категорию абелевых групп.

Прямым пределом или *копределом* диаграммы D абелевых групп называется факторгруппа прямой суммы $\bigoplus_{\alpha\in P}G_\alpha$ по подгруппе, порождённой всеми элементами вида $g_\alpha-f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha\in G_\alpha$. Обозначение: $\operatorname{colim}D$ или $\varinjlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $i_\alpha\colon G_\alpha\to\varinjlim G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $i_\beta f_{\alpha\beta}=i_\alpha$ при $\alpha\leqslant\beta$.

Если в P существует наибольший элемент μ, то $\varinjlim G_\alpha=G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varinjlim G_\alpha=\bigoplus_{\alpha\in P}G_\alpha$.

Предложение 1.11. *Пусть в P для любых двух элементов $\alpha,\beta\in P$ существует такой элемент $\gamma\in P$, что $\alpha\leqslant\gamma$ и $\beta\leqslant\gamma$. Тогда прямой предел $\varinjlim G_\alpha$ можно отождествить с фактормножеством $(\bigsqcup_{\alpha\in P}G_\alpha)/{\sim}$ по отношению эквивалентности, порождённому эквивалентностями $g_\alpha\sim f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha\in G_\alpha$.*

Доказательство. Введём на фактормножестве $(\bigsqcup_{\alpha\in P}G_\alpha)/\sim$ структуру абелевой группы следующим образом. Для классов эквивалентности $[g_\alpha]$ и $[g_\beta]$ элементов $g_\alpha\in G_\alpha$ и $g_\beta\in G_\beta$ найдём такой элемент $\gamma\in P$, что $\alpha\leqslant\gamma$ и $\beta\leqslant\gamma$, и положим $[g_\alpha]+[g_\beta]=[f_{\alpha\gamma}(g_\alpha)+f_{\beta\gamma}(g_\beta)]$, где в правой части элементы складываются в группе G_γ. Тогда отображение

$$\varinjlim G_\alpha=\Bigl(\bigoplus_{\alpha\in P}G_\alpha\Bigr)/{\sim}\;\to\;\Bigl(\bigsqcup_{\alpha\in P}G_\alpha\Bigr)/{\sim},\qquad [g_\alpha]\mapsto[g_\alpha],$$

является изоморфизмом. □

Предложение 1.12 (универсальное свойство прямого предела)**.** *Пусть $D=\{G_\alpha\colon\alpha\in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P. Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_\alpha\colon G_\alpha\to H$, удовлетворяющие соотношениям $h_\beta f_{\alpha\beta}=h_\alpha$ при $\alpha\leqslant\beta$. Тогда существует единственный такой гомоморфизм $h\colon\varinjlim G_\alpha\to H$, что $hi_\alpha=h_\alpha$:*

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[dr, "i_\alpha"] \arrow[drr, bend left, "h_\alpha"] \arrow[dd, "f_{\alpha\beta}"'] & & \\
& \varinjlim G_\alpha \arrow[r, dashed, "h"] & H \\
G_\beta \arrow[ur, "i_\beta"'] \arrow[urr, bend right, "h_\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Гомоморфизм h однозначно задаётся условием $h([g_\alpha])=h_\alpha(g_\alpha)$ для $g_\alpha\in G_\alpha$, $[g_\alpha]\in\varinjlim G_\alpha=(\bigoplus_{\alpha\in P}G_\alpha)/{\sim}$. □

Это универсальное свойство определяет копредел диаграммы $D\colon\mathcal{P}\to\mathcal{C}$ для произвольной категории $\mathcal{C}$. Конструкция 1.10 показывает, что копределы существуют в категории абелевых групп. Копределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств: прямую сумму необходимо заменить на несвязное объединение (копроизведение пространств), а факторгруппу — на факторпространство.

Пусть теперь $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное по включению множество компактных подмножеств $K \subset X$. Мы имеем диаграмму групп $H^i(X, X \setminus K; G)$ и гомоморфизмов $H^i(X, X \setminus K; G) \to H^i(X, X \setminus L; G)$ для $K \subset L$.

Предложение 1.13. *$H^i_c(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$.*

Доказательство. Так как каждый элемент из $H^i_c(X; G)$ представлен коциклом в $C^i(X, X \setminus K; G)$ для некоторого компактного $K \subset X$, получаем гомоморфизм $H^i_c(X; G) \to \left(\bigoplus_{K \subset X} H^i(X, X \setminus K; G)\right)/\sim\ = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$. Сюръективность и инъективность этого гомоморфизма следует из определений (задача). □

Пример 1.14. Вычислим когомологии с компактными носителями пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть B_k — шар радиуса $k > 0$ с центром в нуле. Так как каждое компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ содержится в некотором B_k, мы имеем

$$H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G),$$

где последний предел берётся по упорядоченному множеству шаров B_k. Так как $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) \to H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_l; G)$ — изоморфизм при $k < l$, получаем

$$H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) = \begin{cases} G & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь R-ориентируемое n-мерное многообразие M, возможно некомпактное. Далее гомологии и когомологии будем рассматривать с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей.

Согласно лемме 1.4 существует единственный элемент $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$, который отображается в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ для любой точки $x \in K$. Рассмотрим гомоморфизм $H^k(M, M \setminus K) \to H_{n-k}(M)$, $\varphi \mapsto \mu_K \frown \varphi$. Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств и $i\colon (M, M \setminus L) \to (M, M \setminus K)$ — соответствующее отображение пар, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^k(M, M \setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"'] & H_{n-k}(M) \arrow[d, equal] & \varphi \arrow[r, mapsto] & \mu_K \frown \varphi \\ H^k(M, M \setminus L) \arrow[r] & H_{n-k}(M) & \varphi \arrow[r, mapsto] & \mu_L \frown \varphi \end{tikzcd}$$

коммутативна. Действительно, $\mu_L \frown i^*(\varphi) = i_*(\mu_L) \frown \varphi = \mu_K \frown \varphi$, где первое соотношение следует из леммы 1.8, а $i_*(\mu_L) = \mu_K$ в силу единственности μ_K. Тогда из предложения 1.12 получаем, что определён *гомоморфизм двойственности*

$$D_M\colon H^k_c(M) = \varinjlim H^k(M, M \setminus K) \to H_{n-k}(M).$$

Теорема 1.15. *Для R-ориентируемого n-мерного многообразия M гомоморфизм двойственности*

$$D_M\colon H^k_c(M; R) \to H_{n-k}(M; R)$$

является изоморфизмом.

Так как $H^k_c(M;R) = H^k(M;R)$ для компактного M, теорема 1.9 вытекает из теоремы 1.15.

Доказательство теоремы 1.15. Будем опускать обозначения коэффициентов R.

Шаг 1. $M = \mathbb{R}^n$. Из примера 1.14 получаем, что единственная нетривиальная группа когомологий с компактными носителями есть $H^n_c(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар. Гомоморфизм двойственности есть

$$D_{\mathbb{R}^n}\colon H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \to H_0(\mathbb{R}^n) \cong R, \quad \varphi \mapsto \mu_B \frown \varphi.$$

Здесь класс $\mu_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ представлен любым симплексом $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, содержащим B в своей внутренности. Группа $H^n_c(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ порождена коцепью, принимающей значение 1 на Δ^n и 0 на остальных симплексах. При этом $\mu_B \frown \varphi = \varphi(\mu_B)$ — спаривание n-коцепи с n-цепью μ_B. Поэтому $D_{\mathbb{R}^n}$ — изоморфизм.

Следующие шаги основаны на применении последовательности Майера–Виеториса. Пусть $M = U \cup V$, где U и V открыты. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^k_c(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H^k_c(U) \oplus H^k_c(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus -D_V"] & H^k_c(M) \arrow[r] \arrow[d, "D_M"] & H^{k+1}_c(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_{n-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k-1}(U\cap V) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до знака. Мы оставим это без доказательства, см. [Ха, лемма 3.36].

Шаг 2. M — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Представим M в виде счётного объединения открытых шаров, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Положим $V_k = U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Докажем по индукции, что D_{V_k} — изоморфизм для любого k. Случай $k = 1$ — это шаг 1, так как $U_1 \cong \mathbb{R}^n$. Далее, $V_k = U_k \cup V_{k-1}$, причём V_{k-1} и $U_k \cap V_{k-1}$ гомеоморфны объединению $k-1$ открытых шаров. Рассмотрим коммутативную диаграмму выше с $U = U_k$ и $V = V_{k-1}$. Из предположения индукции и 5-леммы получаем, что D_{V_k} — изоморфизм.

Теперь мы получаем, что M — объединение последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ Если $K \subset V_i$ — компактное подмножество, то $H^k(V_i, V_i \setminus K) = H^k(M, M \setminus K)$ согласно вырезанию. Так как каждое компактное подмножество в M содержится в некотором V_i, получаем $H^k_c(M) = \varinjlim H^k_c(V_i)$. Кроме того, $H_{n-k}(M) = \varinjlim H_{n-k}(V_i)$ (задача). Поэтому гомоморфизм $D_M\colon H^k_c(M) \to H_{n-k}(M)$ является пределом гомоморфизмов $D_{V_i}\colon H^k_c(V_i) \to H_{n-k}(V_i)$. Так как каждый D_{V_i} — изоморфизм, D_M тоже изоморфизм.

Шаг 3. Произвольное M. Так как M имеет счётную базу, его можно представить в виде объединения $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где каждое U_i гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Далее рассуждение в точности повторяет рассуждение из предыдущего шага с заменой открытых шаров на открытые множества в $\mathbb{R}^n$. $\square$

1.6. **Связь с умножением. Сигнатура.** Градуированно-коммутативная алгебра A над полем $\mathbf{k}$ называется *алгеброй Пуанкаре*, если она связна (т. е. $A^0 \cong \mathbf{k}$), конечномерна (т. е. $A = \bigoplus_{i=0}^{d} A^i$, где все A^i конечномерны) и $\mathbf{k}$-линейные отображения

$$A^i \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i}, A^d),$$
$$a \mapsto m_a, \quad \text{где } m_a(b) = ab,$$

являются изоморфизмами при $0 \leqslant i \leqslant d$. Для алгебры Пуанкаре имеем $A^0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A^d, A^d)$, так что $A^d \cong A^0 \cong F$ и $A^i \cong A^{d-i}$.

Мы докажем, что для замкнутого связного многообразия M алгебра когомологий $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ является алгеброй Пуанкаре всегда, а алгебра когомологий $H^*(M;\mathbf{k})$ с коэффициентами в произвольном поле $\mathbf{k}$ является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо.

Нам понадобится формула, связывающая $\frown$- и $\smile$-произведения.

Лемма 1.16. *Для $\alpha \in C_p(X)$, $\varphi \in C^q(X)$ и $\psi \in C^{p-q}(X)$ имеет место формула*

$$\psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\alpha).$$

Доказательство. Для сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^p \to X$ имеем

$$\psi(\sigma \frown \varphi) = \psi\big(\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\dots,v_p]}\big) = \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\psi(\sigma|_{[v_q,\dots,v_p]}) = (\varphi \smile \psi)(\alpha). \qquad \square$$

Рассмотрим ориентированное замкнутое многообразие M с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M)$. Тогда $\smile$-произведение определяет билинейную функцию (*спаривание*)

$$(1) \qquad H^i(M;\mathbf{k}) \times H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \to \mathbf{k}, \quad (\varphi,\psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

для любого поля $\mathbf{k}$ и $0 \leqslant i \leqslant n$.

Напомним, что билинейное спаривание $f\colon V \times W \to \mathbf{k}$, $(v,w) \mapsto f(v,w)$, векторных пространств над $\mathbf{k}$ называется *невырожденным*, если линейные отображения $W \to \mathrm{Hom}(V,\mathbf{k})$, $w \mapsto f(-,w)$, и $V \to \mathrm{Hom}(W,\mathbf{k})$, $v \mapsto f(v,-)$, являются изоморфизмами.

Теорема 1.17. *Для замкнутого многообразия M спаривание* (1) *невырожденно, если M ориентируемо или если поле $\mathbf{k}$ имеет характеристику* 2.

Доказательство. Рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H_{n-i}(M;\mathbf{k}),\mathbf{k}) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}),\mathbf{k}),$$

где h — гомоморфизм, задаваемый вычислением коцепей на цепях, а D^* — гомоморфизм, двойственный к изоморфизму двойственности Пуанкаре $D\colon H^i(M;\mathbf{k}) \to H_{n-i}(M;\mathbf{k})$. Композиция D^*h является изоморфизмом, так как h — изоморфизм для коэффициентов в поле $\mathbf{k}$ в силу формул универсальных коэффициентов. С другой стороны, композиция D^*h переводит $\psi \in H^{n-i}(M;\mathbf{k})$ в гомоморфизм $\varphi \mapsto \psi([M] \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)[M]$, где последнее равенство следует из леммы 1.16. Отсюда следует, что D^*h — первый из изоморфизмов в определении невырожденного спаривания. Второй изоморфизм вытекает из коммутативности $\smile$-произведения. $\square$

Следствие 1.18. *Алгебра когомологий $H^*(M;\mathbf{k}) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(M;\mathbf{k})$ связного замкнутого многообразия M является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо или если поле $\mathbf{k}$ имеет характеристику* 2.

Доказательство. Условие $H^0(M;\mathbf{k}) \cong \mathbf{k}$ вытекает из связности M. Конечномерность групп когомологий компактного многообразия оставим без доказательства (для гладких многообразий есть явная конструкция конечного клеточного разбиения, происходящая из теории Морса; для топологических многообразий см. [Ха, следствие П.9]).

Чтобы проверить, что гомоморфизм $H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}), H^n(M;\mathbf{k}))$, $\psi \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \smile \psi)$, является изоморфизмом, рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}), H^n(M;\mathbf{k})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}),\mathbf{k}),$$

где последний изоморфизм задаётся композицией с изоморфизмом $H^n(M; \mathbf{k}) \to \mathbf{k}$ вычисления n-коцепи на фундаментальном классе. Приведённая выше композиция есть изоморфизм D^*h из доказательства теоремы 1.17. Поэтому первый гомоморфизм в композиции также является изоморфизмом. □

Билинейное спаривание (1) при $n = 2\ell$ и $i = \ell$ задаёт невырожденную билинейную функцию на средней группе когомологий $H^\ell(M; \mathbf{k})$ замкнутого ориентированного многообразия. Эта билинейная функция кососимметрическая, если ℓ нечётно, и симметрическая, если ℓ чётно (т. е. $n = 4k$).

Сигнатура (разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов в диагональном виде) невырожденной симметрической билинейной функции

$$H^{2k}(M; \mathbb{R}) \times H^{2k}(M; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

является гомотопическим инвариантом замкнутого ориентированного $4k$-мерного многообразия M и называется его *сигнатурой*.

1.7. **Двойственность для многообразий с краем.** Топологическим *многообразием с краем* размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, для каждой точки $x \in M$ которого существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству V в полупространстве

$$\mathbb{R}^n_{\geqslant} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n \geqslant 0\}.$$

Если такой гомеоморфизм переводит точку $x \in M$ в точку $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n = 0$, то согласно вырезанию мы имеем $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}^n_{\geqslant}, \mathbb{R}^n_{\geqslant} \setminus \{0\}) = 0$. Если же $x \in M$ переходит при гомеоморфизме в точку $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n > 0$, то $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. Подмножество

$$\partial M = \{x \in M \colon H_n(M, M \setminus \{x\}) = 0\}$$

называется *краем* многообразия M. При любом гомеоморфизме между открытым множеством $U \subset M$ и открытым множеством $V \subset \mathbb{R}^n_{\geqslant}$ точки края переходят в точки с $x_n = 0$. Край ∂M является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Гладкое многообразие с краем определяется аналогично гладкому многообразию без края, при помощи гладкого атласа, в котором отображения перехода являются гладкими отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$. (Отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ называется *гладким*, если оно является ограничением гладкого отображения между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$.)

Многообразие M с краем называется *ориентируемым*, если многообразие $M \setminus \partial M$ ориентируемо.

Для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0, 1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$ (задача). Такая окрестность называется *воротником* края ∂M.

Используя воротник, мы получаем гомотопическую эквивалентность (деформационную ретракцию) $M \setminus \partial M \xrightarrow{\simeq} M$. Отсюда получаем изоморфизм

$$H_i(M, \partial M) \cong H_i(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H_i(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon)$$

для $0 < \varepsilon < 1$, где $K_\varepsilon \subset M \setminus \partial M$ — компактное подмножество. Применяя лемму 1.4 к многообразию $M \setminus \partial M$ и компактному подмножеству K_ε, получаем, что если $M \setminus \partial M$ ориентировано, то существует единственный элемент $[M] \in H_n(M, \partial M)$, ограничение которого даёт локальные ориентации во всех точках $x \in M \setminus \partial M$. Класс $[M] \in H_n(M, \partial M)$ называется *фундаментальным классом* компактного ориентированного многообразия M с краем.

Теорема 1.19 (двойственность Пуанкаре–Лефшеца)**.** *Пусть M — компактное ориентированное n-мерное многообразие с краем и $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — фундаментальный класс. Тогда гомоморфизмы двойственности*

$$H^k(M, \partial M) \to H_{n-k}(M), \qquad \varphi \mapsto [M] \frown \varphi,$$
$$H^k(M) \to H_{n-k}(M, \partial M), \qquad \varphi \mapsto [M] \frown \varphi,$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Теорема 1.15 даёт изоморфизм

$$D\colon H_c^k(M \setminus \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M \setminus \partial M).$$

Из гомотопической эквивалентности $M \setminus \partial M \xrightarrow{\simeq} M$ получаем изоморфизмы

$$H_{n-k}(M \setminus \partial M) \cong H_{n-k}(M),$$
$$H^k(M, \partial M) \cong H^k(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon).$$

Так как любое компактное подмножество $K \subset M \setminus \partial M$ содержится в некотором K_ε, получаем

$$H_c^k(M \setminus \partial M) = \varinjlim H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K) \cong H^k(M, \partial M).$$

Тогда изоморфизм D превращается в первый из доказываемых изоморфизмов. Доказательство второго изоморфизма остаётся в качестве задачи. $\square$

Задачи и упражнения.

1.20. Докажите, что S^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями, а шар D^n и полноторие $D^2 \times S^1$ являются многообразиями с краем.

1.21. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x.

1.22. Докажите, что ориентируемое многообразие R-ориентируемо для любого коммутативного кольца R с единицей, а неориентируемое многообразие R-ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R.

1.23. Докажите, что многообразия S^n, T^n, $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы. При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

1.24. Докажите, что $H_c^i(X) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K)$, где прямой предел берётся по компактным подмножествам $K \subset X$.

1.25. Пусть пространство X представлено в виде объединения последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, причём любое компактное подмножество $K \subset X$ содержится в некотором V_i. Докажите, что $H_k(M) = \varinjlim H_k(V_i)$.

1.26. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i\colon N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^* y, [N] \rangle = \langle x \smile y, [M] \rangle.$$

1.27. Определим действие группы $\mathbb{Z}_7$ на S^5 формулой

$$\tau \cdot (z_0, z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{7}} z_0, e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{7}} z_1, e^{\frac{2\pi i \cdot 5}{7}} z_2),$$

где $\tau \in \mathbb{Z}_7$ — образующая группы. Вычислите группы гомологий $S^5/\mathbb{Z}_7$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и с коэффициентами в $\mathbb{Z}_7$.

1.28. *Связной суммой* $M\#N$ топологических многообразий M и N одной размерности n называется многообразие, получаемое вырезанием малых открытых шаров из M и N с последующим отождествлением их граничных сфер путём некоторого гомеоморфизма $S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$. Насколько выбор этого гомеоморфизма влияет на топологический тип результата — связной суммы? Гомеоморфны ли многообразия

а) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$;

б) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией?

1.29. Докажите, что если n-мерные многообразия M и N замкнуты и ориентируемы, то $H_i(M\#N) = H_i(M) \oplus H_i(N)$ при $0 < i < n$. Как выглядит соответствующая формула в неориентируемом случае?

1.30. Докажите, что для замкнутых n-мерных многообразий M и N имеет место формула для эйлеровой характеристики $\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n)$.

1.31. Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g. Докажите, что отображение $S_g \to S_h$ степени 1 существует тогда и только тогда, когда $g \geqslant h$.

1.32. Вычислите кольцо когомологий

а) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$ и $x_2 = x_4 = 0$ в $\mathbb{R}^4$;

б) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = x_1 = 0$ и $x_5 = x_2 = 0$ в $\mathbb{R}^5$;

в) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$ и $z_2 = z_4 = 0$ в $\mathbb{C}^4$;

г) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $z_3 = z_5 = 0$, $z_4 = z_1 = 0$ и $z_5 = z_2 = 0$ в $\mathbb{C}^5$.

1.33. Докажите, что для замкнутого ориентируемого $(4n+2)$-мерного многообразия M ранг группы $H^{2n+1}(M)$ чётный.

1.34. Вычислите сигнатуру многообразий $\mathbb{C}P^2$ и $S^2 \times S^2$. Для данного целого k постройте связное замкнутое ориентированное многообразие сигнатуры k.

1.35. Докажите, что для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0, 1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$.

1.36. Докажите второй изоморфизм в теореме 1.19.

1.37. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

1.38. Пусть K — компактное подмножество в сфере S^n, причём вложение $K \subset S^n$ является корасслоением, т. е. удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Докажите *изоморфизмы двойственности Александера–Понтрягина*:

$$\widetilde{H}_i(S^n - K) \cong \widetilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(Эти изоморфизмы имеют место и без ограничения на вложение, если K — локально стягиваемое компактное подмножество.)

1.39. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$, отличный от полного симплекса $\varDelta^{m-1}$. Определим *двойственный комплекс*

$$\widehat{K} = \{I \subset [m] \colon [m] \setminus I \notin K\},$$

т. е. наборами вершин симплексов из $\widehat{K}$ являются дополнения до наборов вершин, не порождающих симплексы в K. Докажите изоморфизмы групп симплициальных (ко)гомологий:

$$\widetilde{H}_j(K) \cong \widetilde{H}^{m-3-j}(\widehat{K}).$$

Это комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.

2. Векторные расслоения

2.1. **Локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения.** *Локально тривиальным расслоением* (или просто *расслоением*) называется четвёрка (E, B, F, p), где E, B, F — пространства, а p — такое отображение $E \to B$, что любая точка $x \in B$ имеет окрестность $U \subset B$, для которой существует гомеоморфизм $\varphi_U \colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Гомеоморфизм φ_U называется *тривиализацией* расслоения над U. Пространство E называется *тотальным пространством*, B *базой*, а F *слоем* локально тривиального расслоения. Локально тривиальным расслоением также называют отображение $p \colon E \to B$. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in B$ называется *слоем расслоения над точкой* x и обозначается E_x; каждый слой гомеоморфен F. Как множество, тотальное пространство E предсталяет собой объединение слоёв $\bigcup_{x\in B} E_x$, параметризованных точками базы.

Локально тривиальное расслоение называется *тривиальным*, если в диаграмме выше можно положить $U = B$; это означает, что $E \cong B \times F$.

Отображением или *морфизмом* расслоений $p' \colon E' \to B'$ и $p \colon E \to B$ называется пара отображений $\widetilde{f} \colon E' \to E$ и $f \colon B' \to B$, входящих в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{2}$$

Важным случаем морфизма является *индуцированное расслоение*. Говорят, что расслоение $p' \colon E' \to B'$ *индуцировано* расслоением $p \colon E \to B$ при помощи отображения $f \colon B' \to B$, если

$$E' = \{(e, b') \in E \times B' \colon p(e) = f(b)\}$$

— расслоенное произведение, т. е. диаграмма (2) является декартовым квадратом. Пространство индуцированного расслоения обозначается f^*E. В этом случае отображение $\widetilde{f}$ отождествляет слой индуцированного расслоения $p'\colon f^*E \to B'$ над $b' \in B'$ со слоем расслоения $p\colon E \to B$ над $f(b) \in B$. Если $f\colon B' \hookrightarrow B$ — вложение, что индуцированное расслоение $p'\colon f^*E \to B'$ есть *ограничение* $p\colon E \to B$ на B'. Если $B = pt$, то индуцированное расслоение тривиально.

Локально тривиальное расслоение (E, B, F, p) называется *гладким*, если E, B, F — гладкие многообразия, $p\colon E \to B$ — гладкое отображение и тривиализации φ_U являются диффеоморфизмами.

Пример 2.1.

1. Накрытие является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем F.

2. Проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию представляет собой нетривиальное расслоение над окружностью со слоем отрезок.

3. Пусть $E = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2\colon |z_0|^2+|z_1|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1 = S^2$, $p(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$. Получаем локально тривиальное расслоение $p\colon S^3 \to S^2$ со слоем $F = S^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. В качестве множеств U из определения расслоения можно взять $U_0 = \{[z_0\colon z_1] \in \mathbb{C}P^1\colon z_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[z_0\colon z_1] \in \mathbb{C}P^1\colon z_1 \neq 0\}$.

Локально тривиальное расслоение $p\colon E \to B$ со слоем $F = \mathbb{R}^n$ называется *вещественным n-мерным векторным расслоением*, если ограничение каждой тривиализации $\varphi_U\colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$ на каждый слой является линейным изоморфизмом $E_x \cong x \times \mathbb{R}^n$. Аналогично определяется *комплексное n-мерное векторное расслоение* (со слоем $\mathbb{C}^n$). Векторные расслоения обычно обозначаются греческими буквами ξ, η, γ и т. д.

Если $\varphi_{U_\alpha}\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и $\varphi_{U_\beta}\colon p^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^n$ — две тривиализации векторного расслоения ξ над U_α и U_β, соответственно, то определены *отображения перехода*

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R}), \quad g_{\alpha\beta}(x) = (\varphi_{U_\alpha} \circ \varphi_{U_\beta}^{-1})|_{x\times\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}, \quad g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = \mathrm{id} \tag{3}$$

для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Если задано открытое покрытие $B = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ и отображения перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$, удовлетворяющие соотношениям (3), то можно определить векторное расслоение $p\colon E \to B$, положив

$$E = \Big(\bigcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)\Big)/\sim, \tag{4}$$

где $(x, v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)(v))$ для $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Пример 2.2. *Тавтологическое расслоение* над вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ — это одномерное векторное расслоение $\gamma = \gamma^1_{n,\mathbb{R}}$, слоем которого над точкой $\mathbb{R}P^n$, задаваемой прямой $\ell \in \mathbb{R}^{n+1}$, является сама эта прямая. Таким образом, пространство расслоения γ есть

$$E\gamma = \{(\ell, x)\colon \ell \text{ — одномерное подпространство в } \mathbb{R}^{n+1},\ x \in \ell\}.$$

Аналогично определяется тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma^1_{n,\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}P^n$.

Сечением локально тривиального расслоения $p\colon E \to B$ называется отображение $s\colon B \to E$ такое, что $p \circ s = \mathrm{id}\colon B \to B$. Векторное n-мерное расслоение над B трививально тогда и только тогда, когда оно имеет n сечений $s_1, \dots, s_n$, таких что векторы $s_1(x), \dots, s_n(x)$ линейно независимы для каждой точки $x \in B$.

Морфизмом векторных расслоений $p'\colon E' \to B'$ и $p\colon E \to B$ называется морфизм (2), в котором ограничение отображения $\widetilde{f}\colon E' \to E$ на каждый слой E_x линейно. Если при этом $B = B'$ и $f = \mathrm{id}$, то такой морфизм называется *морфизмом векторных расслоений над* B. Морфизм векторных расслоений, ограничение которого на каждый слой инъективно (соответственно, сюръективно, биективно), называется *мономорфизмом* (соответственно, *эпиморфизмом*, *изоморфизмом*).

Мы будем обозначать тривиальное вещественное и комплексное n-мерное расслоение над данной базой B через $\underline{\mathbb{R}}^n$ и $\underline{\mathbb{C}}^n$, соответственно. Для векторных расслоений над одной и той же базой B определены те же операции, что и над векторными пространствами. В частности, определены *прямая сумма* $\xi \oplus \eta$, *тензорное произведение* $\xi \otimes \eta$, Hom-*расслоение* $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$, *двойственное расслоение* $\xi^* = \mathrm{Hom}(\xi, \underline{\mathbb{R}})$, *внешняя степень* $\Lambda^k\xi$, *симметрическая степень* $S^k\xi$ и т. д.

Для вещественного векторного расслоения ξ его *комплексификация* $\xi_{\mathbb{C}} = \xi \otimes \mathbb{C}$ является комплексным расслоением той же размерности. Для комплексного n-мерного расслоения η его *овеществление* $\eta_{\mathbb{R}}$ является вещественным $2n$-мерным расслоением. Имеют место изоморфизмы $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$ и $(\eta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \eta \oplus \overline{\eta}$, где $\overline{\eta}$ — комплексно сопряжённое расслоение.

Предложение 2.3. *Векторное расслоение ξ над компактной хаусдорфовой базой вкладыватся в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$ над той же базой для некоторого N, т. е. существует мономорфизм расслоений $j\colon \xi \hookrightarrow \underline{\mathbb{R}}^N$.*

Доказательство. Пусть $p\colon E \to B$ — данное расслоение. Так как B компактно, существует конечное покрытие $B = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ открытыми множествами, над которыми расслоение тривиально. Пусть $f_1, \dots, f_k$ — разбиение единицы, подчинённое этому открытому покрытию, т. е. функция $f_i\colon B \to \mathbb{R}$ непрерывна, неотрицательна, её носитель содержится в U_i и $\sum_{i=1}^k f_i = 1$. Рассмотрим тривиализации $\varphi_i\colon p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n$. Для $i = 1, \dots, k$ определим непрерывное отображение

$$f_i \cdot \varphi_i\colon E \to B \times \mathbb{R}^n, \quad e \mapsto \begin{cases} f_i(p(e)) \cdot \varphi_i(e) & \text{при } e \in p^{-1}(U_i), \\ ((p(e), 0) & \text{при } e \notin p^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Положим $N = nk$ и отождествим $\mathbb{R}^N$ с $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}^n$. Тогда требуемый мономорфизм $j\colon \xi \hookrightarrow \underline{\mathbb{R}}^N$ задаётся формулой

$$j(e) = \bigl(f_1 \cdot \varphi_1(e), \dots, f_k \cdot \varphi_k(e)\bigr)$$

для $e \in E$. □

Римановой метрикой на вещественном векторном расслоении ξ называется положительно определённая симметрическая билинейная функция (скалярное произведение), заданная в каждом слое E_x, такая что компоненты её матрицы в координатах локальных тривиализаций являются непрерывными функциями от $x \in B$ (гладкими функциями в случае гладкого расслоения). Аналогично определяется *эрмитова метрика* на комплексном расслоении.

Предложение 2.4. *Риманова (эрмитова) метрика существует на вещественном (комплексном) расслоении над компактной хаусдорфовой базой.*

Доказательство. Вложим расслоение в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$ согласно предложению 2.3, введём метрику на $\mathbb{R}^N$ и ограничим её на слои расслоения. □

Предложение 2.5. *Для любого векторного расслоения ξ над компактной хаусдорфовой базой B существует расслоение η над той же базой, такое что $\xi \oplus \eta \cong \underline{\mathbb{R}}^N$ (тривиальное расслоение).*

Доказательство. Вложим пространство расслоения в тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^N$, введём метрику на $\mathbb{R}^N$ и возьмём в качестве η расслоение, слоем которого над $x \in B$ является ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^N$ к слою E_x расслоения ξ. □

2.2. **Касательное и нормальное расслоение.** Пусть M — n-мерное гладкое многообразие с гладким атласом $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ и гладкими отображениями замены координат $\psi_{\alpha\beta}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Касательное пространство $\mathcal{T}_xM$ состоит из всех касательных векторов к M в точке x. Объединение $\mathcal{T}M = \bigcup_{x\in M} \mathcal{T}_xM$ касательных пространств во всех точках является тотальным пространством n-мерного гладкого вещественного векторного расслоения над M, называемого *касательным расслоением*. Его можно определить как расслоение (4) над M с тривиализующим атласом $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbb{R}), \quad x \mapsto \mathrm{Jac}_x\, \psi_{\alpha\beta},$$

где $\mathrm{Jac}_x\, \psi_{\alpha\beta}$ обозначает матрицу Якоби из частных производных отображения замены координат в точке $x \in M$.

По определению, сечениями касательного расслоения $\mathcal{T}M$ являются векторные поля на M. Гладкое многообразие M называется *параллелизуемым*, если касательное расслоение $\mathcal{T}M$ тривиально, т. е. на M существует $n = \dim M$ векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке $x \in M$.

Гладкое многообразие M называется *почти комплексным*, если в касательном расслоении $\mathcal{T}M$ можно ввести структуру комплексного векторного расслоения. Как и в случае векторных пространств, комплексная структура на вещественном расслоении $\mathcal{T}M$ задаётся выбором морфизма расслоений $I\colon \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$, такого что $I^2 = -\,\mathrm{id}_{\mathcal{T}M}$. Почти комплексное многообразие имеет чётную размерность. Если само M является комплексно-аналитическим многообразием с голоморфным атласом $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ (и голоморфными отображениями замены координат), то касательное расслоение $\mathcal{T}M$ имеет естественную комплексную структуру. Однако не любая почти комплексная структура происходит из комплексной структуры на M.

Пусть M — гладкое подмногообразие в гладком многообразии N. *Нормальным расслоением* M в N называется фактор-расслоение $(\mathcal{T}N|_M)/\mathcal{T}M$, где $\mathcal{T}N|_M$ обозначает ограничение касательного расслоения к N на M. Нормальное расслоение обозначается $\nu(M \subset N)$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \subset N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к $\mathcal{T}_xM$ в $\mathcal{T}_xN$.

Опишем касательное расслоение к вещественному и комплексному проективному пространству. Наряду с одномерным тавтологическим расслоением γ (пример 2.2) рассмотрим его ортогональное дополнение $\gamma^\perp$, слоем которого над прямой $\ell \in \mathbb{C}P^n$ является ортогональное дополнение к этой прямой в $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$E\gamma^\perp = \{(\ell, v)\colon \ell \text{ — одномерное подпространство в } \mathbb{C}^{n+1},\ v \in \ell^\perp\}.$$

Тогда мы имеем $\gamma \oplus \gamma^\perp = \underline{\mathbb{C}}^{n+1}$.

Предложение 2.6. *$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.*

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и проекцию $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$, $p(x) = \pm x$. Касательное расслоение сферы есть

$$\mathcal{T}S^n = \{(x, v)\colon x, v \in \mathbb{R}^{n+1},\ |x| = 1,\ (x, v) = 0\}.$$

Дифференциал проекции $Dp\colon \mathcal{T}S^n \to \mathcal{T}\mathbb{R}P^n$ переводит касательный вектор (x, v) в касательный вектор $\pm(x, v)$ к $\mathbb{R}P^n$, где

$$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n = \{\pm(x, v)\colon x, v \in \mathbb{R}^{n+1},\ |x| = 1,\ (x, v) = 0\}.$$

Тогда требуемый изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ отображает $\pm(x, v) \in \mathcal{T}\mathbb{R}P^n$ в морфизм $\gamma \to \gamma^\perp$, переводящий (ℓ, x) в (ℓ, v), где $x \in \ell$, $v \in \ell^\perp$.

Изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ доказывается аналогично (задача). □

Теорема 2.7. *Имеют место изоморфизмы*

$$\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \underbrace{\gamma \oplus \ldots \oplus \gamma}_{n+1}, \quad \mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \underbrace{\overline{\gamma} \oplus \ldots \oplus \overline{\gamma}}_{n+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) \oplus \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma) = \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) = \operatorname{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}}^{n+1}) \cong \underbrace{\overline{\gamma} \oplus \ldots \oplus \overline{\gamma}}_{n+1},$$

где во втором равенстве мы воспользовались тем, что одномерное расслоение $\operatorname{Hom}(\gamma, \gamma)$, имеет всюду ненулевое сечение, задаваемое тождественным морфизмом, и потому тривиально. □

2.3. **Многообразия Грассмана, вложение Плюккера и клетки Шуберта.** Множество всех k-мерных линейных подпространств (плоскостей) в $\mathbb{R}^N$ называется вещественным *многообразием Грассмана* (или *грассманианом*) и обозначается $G_k(\mathbb{R}^N)$. Аналогично определяется комплексное многообразие Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$.

Подпространство $\pi \subset \mathbb{R}^N$ размерности k задаётся k-поливектором $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^k\mathbb{R}^N$ или, в координатной записи, классом эквивалентности $[P]$ матриц P размера $k \times N$ с точностью до умножения слева на матрицу из $GL(k, \mathbb{R})$ (в строках матрицы стоят координаты базисных векторов $v_1, \ldots, v_k$ подпространства π). Для набора индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant N$ будем обозначать через $\mathbb{R}_{i_1\ldots i_k}$ соответствующее k-мерное координатное подпространство в $\mathbb{R}^N$ и через $p_{i_1\ldots i_k}$ определитель подматрицы в P, образованной столбцами с номерами $i_1, \ldots, i_k$. Рассмотрим подмножество

$$\begin{aligned} U_{i_1\ldots i_k} &= \{\pi \in G_k(\mathbb{R}^N)\colon \pi \text{ проектируется без вырожений на } \mathbb{R}_{i_1\ldots i_k}\} = \\ &= \{[P]\colon p_{i_1\ldots i_k} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Тогда $U_{i_1\dots i_k}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{k(N-k)}$ (с координатами — элементами матрицы P вне столбцов с номерами $i_1,\dots,i_k$) и атлас $\{U_{i_1\dots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{R}^N)$ структуру гладкого многообразия размерности $k(N-k)$.

В случае комплексного грассманиана атлас $\{U_{i_1\dots i_k}\}$ задаёт на $G_k(\mathbb{C}^N)$ структуру комплексно-аналитического многообразия комплексной размерности $k(N-k)$. Построения в вещественном и комплексном случае абсолютно аналогичны, далее в этом разделе будем рассматривать комплексный случай.

Набор из $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ чисел $\{p_{i_1\dots i_k}\}$ является координатами поливектора $v_1\wedge\dots\wedge v_k$ в стандартном базисе $\{e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}\}$ внешней степени $\Lambda^k\mathbb{C}^N$ и называется *координатами Плюккера* k-мерной плоскости π. Они обобщают однородные координаты в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{N-1} = G_1(\mathbb{C}^N)$ и удовлетворяют системе уравнений, называемых *соотношениями Плюккера*.

Теорема 2.8 (вложение и соотношения Плюккера)**.** *Отображение*

$$G_k(\mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}P(\Lambda^k\mathbb{C}^N) = \mathbb{C}P^{C_N^k-1}, \quad \pi \mapsto [v_1\wedge\dots\wedge v_k] = [\dots : p_{i_1\dots i_k} : \dots]$$

является вложением гладкого подмногообразия, а его образ задаётся соотношениями

$$\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r p_{i_1\dots i_{k-1}j_r} p_{j_1\dots\widehat{j_r}\dots j_{k+1}} = 0$$

для любых наборов $(i_1,\dots,i_{k-1})$ *и* $(j_1,\dots,j_{k+1})$*, где мы полагаем* $p_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)}} = (-1)^\sigma p_{i_1\dots i_k}$ *для любой перестановки* σ*.*

Соотношения Плюккера доказываются в линейной алгебре, мы лишь приведём первый пример нетривиального соотношения.

Пример 2.9. Грассманиан $G_2(\mathbb{C}^4)$ вкладывается в $\mathbb{C}P(\Lambda^2\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}P^5$ с однородными координатами $[p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$ как гиперповерхность, заданная квадратичным уравнением

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0,$$

которое получается, если положить $(i_1) = (1)$ и $(j_1, j_2, j_3) = (2,3,4)$ в теореме 2.8.

Опишем также клеточное разбиение многообразия Грассмана на клетки Шуберта.

Рассмотрим стандартный координатный флаг (последовательность вложенных подпространств) $\{0\}\subset\mathbb{C}^1\subset\mathbb{C}^2\subset\dots\subset\mathbb{C}^N$. Для k-мерной плоскости $\pi\in G_k(\mathbb{C}^N)$ рассмотрим последовательность

$$0 \leqslant \dim(\pi\cap\mathbb{C}^1) \leqslant \dim(\pi\cap\mathbb{C}^2) \leqslant \dots \leqslant \dim(\pi\cap\mathbb{C}^N) = k.$$

Два соседних члена этой последовательности отличаются не более чем на 1, т. е. в последовательности есть в точности k «скачков». Эти скачки задаются *символами Шуберта*

$$\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_k), \quad 1\leqslant s_1 < s_2 < \dots < s_k \leqslant N, \quad \dim(\pi\cap\mathbb{C}^{s_i}) = i,\ \dim(\pi\cap\mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1.$$

Рассмотрим множество k-плоскостей, «скачки» которых задаются в точности символом $\boldsymbol{s}$:

$$e(\boldsymbol{s}) = \{\pi\in G_k(\mathbb{C}^N)\colon \dim(\pi\cap\mathbb{C}^{s_i}) = i,\ \dim(\pi\cap\mathbb{C}^{s_i-1}) = i-1 \text{ для } i = 1,2\dots,k\}.$$

Тогда $e(\boldsymbol{s})$ называется *клеткой Шуберта.* Очевидно,

$$G_k(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_k)} e(\boldsymbol{s}), \quad \text{причём } e(\boldsymbol{s}) \cap e(\boldsymbol{s}') = \varnothing \text{ при } \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'.$$

Легко видеть, что $\pi \in e(\boldsymbol{s})$ тогда и только тогда, когда плоскость π задаётся матрицей

$$P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

где 1 в i-й строке стоит на s_i-м месте, а на позициях, обозначенных $*$, стоят произвольные числа. Такой вид матрицы, задающей плоскость $\pi \in e(\boldsymbol{s})$, определён однозначно с точностью до умножения слева на квадратную нижнетреугольную матрицу с 1 на диагонали. Отсюда следует, что $e(\boldsymbol{s})$ гомеоморфно открытому шару размерности

$$\dim e(\boldsymbol{s}) = 2((s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \ldots + (s_k - k)).$$

Введём частичный порядок на символах Шуберта: $\boldsymbol{s}' \leqslant \boldsymbol{s}$, если $s_i' \leqslant s_i$ для каждого $i = 1, \ldots, k$. Доказательство следующего утверждения мы опустим (см. [MC] или [Ha]).

Теорема 2.10 (клеточное разбиение Шуберта)**.** *Клетки Шуберта $e(\boldsymbol{s})$, соответствующие всевозможным символам $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant N$, задают клеточное разбиение многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$. При этом замыкание клетки $e(\boldsymbol{s})$ содержится в объединении клеток $e(\boldsymbol{s}')$ с $\boldsymbol{s}' \leqslant \boldsymbol{s}$.*

Имеем вложение грассманианов $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, соответствующее вложению $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^{N+1}$ по первым N координатам.

Предложение 2.11. *$G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ является клеточным подпространством относительно разбиения на клетки Шуберта. При этом каждая клетка Шуберта размерности $\leqslant 2(N-k)$ в $G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ лежит в $G_k(\mathbb{C}^N)$.*

Доказательство. Рассмотрим клетку $e(\boldsymbol{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$, где $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant N+1$. Ясно, что $e(\boldsymbol{s}) \subset G_k(\mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда $s_k \leqslant N$. Поэтому $G_k(\mathbb{C}^N) \subset G_k(\mathbb{C}^{N+1})$ — замкнутое подмножество, представляющее собой объединение клеток, т. е. клеточное подпространство. Если $e(\boldsymbol{s}) \not\subset G_k(\mathbb{C}^N)$, то $s_k = N+1$ и, следовательно,

$$\dim e(\boldsymbol{s}) = 2((s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \ldots + (s_k - k)) \geqslant 2(s_k - k) > 2(N-k). \qquad \square$$

Разбиением целого числа $d \geqslant 0$ называется неупорядоченное множество $\omega = (i_1, \ldots, i_p)$ натуральных чисел, таких что $i_1 + \ldots + i_p = d$.

Предложение 2.12. *Число клеток размерности $2d$ в разбиении Шуберта грассманиана $G_k(\mathbb{C}^N)$ равно числу разбиений числа d на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $N-k$.*

Доказательство. Клетки размерности $2d$ соответствуют символам Шуберта $\boldsymbol{s}$, таким что $d = (s_1 - 1) + (s_2 - 2) + \ldots + (s_k - k)$. Рассмотрим множество $\omega = (i_1, \ldots, i_p)$, получаемое удалением нулей из последовательности $s_1 - 1, s_2 - 2, \ldots, s_k - k$. Тогда $i_1 + \ldots + i_p = d$, т. е. ω — разбиение d на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $N-k$, так как $s_k \leqslant N$. Обратно, каждое такое разбиение задаёт символ $\boldsymbol{s}$ (надо упорядочить $(i_1, \ldots, i_p)$ по неубыванию, дописать слева $k-p$ нулей и к каждому члену полученной последовательности прибавить его номер). $\square$

2.4. **Классификация векторных расслоений.** *Бесконечномерным грассманианом* $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется множество всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_N \mathbb{R}^N$. Каждое k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^\infty$ лежит в некотором $\mathbb{R}^N$, так что $G_k = \bigcup_N G_k(\mathbb{R}^N)$. На G_k вводится *слабая топология*: подмножество $A \subset G_k$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты пересечения $A \cap G_k(\mathbb{R}^N)$ для всех N.

Теорема 2.13. *Клетки $e(\boldsymbol{s})$, соответствующие символам Шуберта $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, где $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k$, задают клеточное разбиение бесконечномерного грассманиана G_k. Число клеток размерности d равно числу разбиений числа d на не более чем k слагаемых.*

Доказательство. Это следует из теоремы 2.10 и предложений 2.11 и 2.12. $\square$

Пример 2.14. *Тавтологическое расслоение* над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$ — это k-мерное векторное расслоение $\gamma^k = \gamma^k_{N,\mathbb{R}}$, слоем которого над $\pi \in G_k(\mathbb{R}^N)$ является k-плоскость π. Пространство тавтологического расслоения γ^k есть

$$E_k = \{(\pi, v)\colon \pi \text{ — } k\text{-мерное подпространство в } \mathbb{R}^N,\ v \in \pi\}.$$

Также определено тавтологическое расслоение γ^k над $G_k = G_k(\mathbb{R}^\infty)$.

Тавтологическое расслоение γ^k лежит в основе классификационной теоремы.

Теорема 2.15. *Пусть B — хаусдорфово паракомпактное пространство (например, клеточное). Тогда*

а) *любое k-мерное векторное расслоение ξ над B изоморфно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоения γ^k при помощи некоторого отображения $f\colon B \to G_k$, т. е. $\xi \cong f^*\gamma^k$;*

б) *индуцированные расслоения $f_0^*\gamma^k$ и $f_1^*\gamma^k$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения $f_0\colon B \to G_k$ и $f_1\colon B \to G_k$ гомотопны.*

Таким образом, множество $\mathrm{Vect}^k(B)$ классов изоморфизма k-мерных векторных расслоений над B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[B, G_k]$ классов гомотопных отображений $B \to G_k$.

Доказательство. Мы опустим некоторые детали доказательства; подробности можно найти в [Ми] или [На, Ch. 1].

Пусть расслоение ξ задаётся проекцией $p\colon E \to B$, а тавтологическое расслоение γ^k — проекцией $p_k\colon E_k \to G_k$. Прежде всего заметим, что построение изоморфизма $\xi \cong f^*\gamma^k$ эквивалентно построению отображения $g\colon E \to \mathbb{R}^\infty$, ограничение которого на каждый слой является линейным мономорфизмом. Действительно, если $\xi \cong f^*\gamma^k$, то отображение g задаётся композицией $E \cong f^*E_k \to E_k \to \mathbb{R}^\infty$, где последнее отображение есть $(\pi, v) \mapsto v$. Обратно, если дано $g\colon E \to \mathbb{R}^\infty$, то зададим $f\colon B \to G_k$ по формуле $f(x) = g(E_x)$.

Вначале докажем а) в случае, когда база B компактна. Тогда существует вложение $j\colon E \hookrightarrow B \times \mathbb{R}^N$ в тривиальное расслоение (предложение 2.3). Композиция с проекцией $B \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ даёт требуемое отображение $g\colon E \to \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$. В общем случае рассуждение аналогично доказательству предложения 2.3 и использует разбиение единицы. Существует счётное покрытие $B = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ открытыми множествами, над которыми расслоение ξ тривиально, и разбиение единицы $\{f_i\}$, подчинённое этому покрытию. Последнее означает, что функция $f_i\colon B\to\mathbb{R}$ непрерывна, её носитель содержится в U_i, в каждой точке $x\in B$ лишь конечное число f_i отлично от нуля и $\sum_i f_i=1$. (Существование разбиения единицы следует из того, что клеточные пространства паракомпактны.) Для каждого i определим $h_i\colon p^{-1}(U_i)\to\mathbb{R}^k$ как композицию тривиализации $\varphi_i\colon p^{-1}(U_i)\xrightarrow{\cong}U_i\times\mathbb{R}^k$ и проекции. Далее определим

$$g_i\colon E\to\mathbb{R}^k,\quad e\mapsto\begin{cases}f_i(p(e))\cdot h_i(e) & \text{при } e\in p^{-1}(U_i),\\ 0 & \text{при } e\notin p^{-1}(U_i).\end{cases}$$

Отождествим $\mathbb{R}^\infty$ с $\bigoplus_{i=1}^\infty\mathbb{R}^k$. Тогда требуемое отображение $g\colon E\to\mathbb{R}^\infty$ задаётся формулой $g(e)=(g_1(e),\ldots,g_i(e),\ldots)$.

Теперь докажем б). Пусть $f_0^*E_k\cong f_1^*E_k\cong E$, изоморфизм $f_0^*E_k\cong E$ задаётся отображением $g_0\colon E\to\mathbb{R}^\infty$, а изоморфизм $f_1^*E_k\cong E$ задаётся отображением $g_1\colon E\to\mathbb{R}^\infty$. Чтобы построить гомотопию $f_t\colon B\to G_k$, $t\in[0,1]$, между f_0 и f_1 достаточно построить гомотопию $g_t\colon E\to\mathbb{R}^\infty$ между g_0 и g_1, такую что каждое g_t мономорфно на слоях; тогда $f_t(x)=g_t(E_x)$ даёт требуемую гомотопию.

Рассмотрим готомотопию $L_t\colon\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^\infty$, $L_t(r_1,r_2,\ldots)=(1-t)(r_1,r_2,\ldots)+t(r_1,0,r_2,0,\ldots)$. Тогда каждое L_t линейно, $L_0=\mathrm{id}$, а L_1 «прореживает» координаты, так что на чётных местах стоят нулю. Композиция с L_t задаёт гомотопию между g_0 и отображением $g_0'=L_1\circ g_0$, которое имеет ненулевые координаты только на нечётных местах. Аналогично строим гомотопию между g_1 и отображением $g_1'\colon E\to\mathbb{R}^\infty$, которое имеет ненулевые координаты только на чётных местах. Теперь $g_t'=(1-t)g_0'+tg_1'$ есть гомотопия между g_0' и g_1'. В результате получаем последовательность гомотопий $g_0\simeq g_0'\simeq g_1'\simeq g_1$, где каждое промежуточное отображение $E\to\mathbb{R}^\infty$ мономорфно на слоях. Следовательно, $f_0\simeq f_1$.

Теперь пусть $f_0\simeq f_1$ при помощи гомотопии $F\colon B\times I\to G_k$. Рассмотрим индуцированное расслоение $F^*\gamma^k$ над $B\times I$. Его ограничения на $B\times\{0\}$ и $B\times\{1\}$ изоморфны (доказательство этого факта — задача). Первое ограничение есть $f_0^*\gamma^k$, а второе — $f_1^*\gamma_k$. □

Ввиду теоремы 2.15 тавтологическое расслоение γ^k также называется *универсальным* k-мерным векторным расслоением, а его база $G_k=G_k(\mathbb{R}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством* k-мерных вещественных векторных расслоений и обозначается $BO(k)$. Говорят, что отображение $f\colon B\to G_k$, для которого $\xi\cong f^*\gamma^k$, *классифицирует* расслоение ξ.

Теорема 2.15 также имеет место для комплексных векторных расслоений. Бесконечномерный комплексный грассманиан $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ называется *классифицирующим пространством* k-мерных комплексных векторных расслоений и обозначается $BU(k)$.

Задачи и упражнения.

2.16. Приведите пример локально тривиального расслоения $p\colon E\to B$ со слоем $\mathbb{R}^n$, не являющегося векторным.

2.17. При помощи эрмитовой метрики установите канонический изоморфизм $\xi^*\cong\overline{\xi}$ между двойственным комплексным расслонием $\xi^*=\mathrm{Hom}(\xi,\underline{\mathbb{C}})$ и комплексно сопряжённым расслоением $\overline{\xi}$.

2.18. Докажите, что пространство тавтологического расслоения $\gamma^1_{1,\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно открытой ленте Мёбиуса (проективной плоскости с выколотой точкой).

2.19. Докажите, что тавтологическое расслоение $\gamma^1_{n,\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}P^n$ нетривиально при $n \geqslant 1$.

2.20. Задайте явно отображения перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ тавтологического расслоения $\gamma^1_{n,\mathbb{C}}$ для покрытия $\mathbb{C}P^n$ стандартными аффинными картами.

2.21. Пусть для открытого покрытия $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ даны два набора отображений перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbb{R})$ и $g'_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbb{R})$, удовлетворяющие условиям (3). Докажите, что задаваемые ими векторные расслоения ξ и ξ' изоморфны тогда и только тогда, когда существует набор отображений $f_\alpha\colon U_\alpha \to GL(n,\mathbb{R})$, $\alpha \in A$, удовлетворяющий соотношениям $g'_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x) f_\beta^{-1}(x)$ для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

2.22. Докажите, что

а) на сфере S^{2n+1} существует векторное поле без нулей;
б) на сфере S^{11} существуют три линейно независимых векторных поля без нулей;
в) сфера S^{2n} не параллелизуема при $n \geqslant 1$.

2.23. Пусть $\mathcal{V}(B)$ — категория векторных расслоений и морфизмов над компактным хаусдорфовым пространством B. Докажите, что

а) пространство сечений $\Gamma(\xi)$ векторного расслоения ξ является конечно порождённым проективным модулем над кольцом $C(B)$ непрерывных функций на B (модуль называется проективным, если он является прямым слагаемым свободного модуля);
б) категория $\mathcal{V}(B)$ эквивалентна категории конечно порождённых проективных модулей над $C(B)$, при этом тривиальные расслоения соответствуют свободным модулям (это утверждение известно как *теорема Свана*).

2.24. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

2.25. Докажите изоморфизм $\mathcal{T}G_k(\mathbb{R}^N) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, где $\gamma = \gamma^k_{N,\mathbb{R}}$ — тавтологическое расслоение над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$, а $\gamma^\perp$ — его ортогональное дополнение. Аналогично, $\mathcal{T}G_k(\mathbb{C}^N) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ для комплексного грассманиана.

2.26. Докажите, что если B компактно и хаусдорфово, то ограничения векторного расслоения $E \to B \times I$ на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны (это также верно и в более общем случае паракомпактного и хаусдорфового B).

3. Характеристические классы Штифеля–Уитни и Чженя

Мы изложим два подхода к определению характеристических классов векторных расслоений. Первый основан на вычислении когомологий проективизации векторного расслоения; этот подход по-видимому является наиболее универсальным и применим также и для других теорий когомологий. Второй подход основан на непосредственном вычислении кольца когомологий классифицирующих пространств — бесконечномерных грассманианов.

3.1. **Теорема Лере–Хирша.** Для любого отображения $p\colon E \to B$ кольцо когомологий $H^*(E)$ является модулем над кольцом $H^*(B)$ по формуле $b \cdot e = p^*(b) \smile e$ для $b \in H^*(B)$, $e \in H^*(E)$.

Следующая теорема позволяет при некоторых условиях вычислять когомологии тотального пространства локально тривиально расслоения через когомологии базы.

Теорема 3.1 (Лере–Хирш)**.** *Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное расслоение и R — коммутативное кольцо с единицей. Предположим, что*

1) *$H^k(F;R)$ — конечно-порождённый свободный R-модуль для любого k;*
2) *существуют классы $v_j \in H^*(E;R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой F дают R-базис в $H^*(F;R)$.*

Тогда $H^*(E;R)$ является свободным $H^*(B;R)$-модулем с базисом $\{v_j\}$, т. е. отображение

$$\varPhi_E\colon H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R) \to H^*(E;R), \quad b \otimes i^*(v_j) \mapsto p^*(b) \smile v_j,$$

является изоморфизмом R-модулей.

Доказательство. Мы докажем теорему в предположении, что B — клеточное пространство, этого будет достаточно для наших целей. Предположим вначале, что B конечномерно, $\dim B = n$. Утверждение очевидно при $n = 0$, так что можно предположить по индукции, что утверждение верно для $(n-1)$-мерного остова B^{n-1}.

Пусть $B' \subset B$ — подпространство, полученное удалением точки x_α из каждой n-мерной клетки $e^n_\alpha \subset B$. Тогда существует гомотопическая эквивалентность (деформационная ретракция) $B' \xrightarrow{\simeq} B^{n-1}$. Из свойства поднятия гомотопии для расслоения $E' \to B'$ получаем гомотопическую эквивалентность $E' \xrightarrow{\simeq} p^{-1}(B^{n-1})$. Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^*(B,B') \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\varPhi_{E,E'}"] & H^*(B) \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\varPhi_E"] & H^*(B') \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\varPhi_{E'}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^*(E,E') \arrow[r] & H^*(E) \arrow[r] & H^*(E') \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Здесь нижняя строка — точная последовательность пары (E, E'), а верхняя строка получается из точной последовательности пары (B, B') тензорным умножением на свободный R-модуль $H^*(F)$. Коммутативность двух квадратов, показанных на диаграмме, следует из естественности входящих в них гомоморфизмов. Коммутативность квадрата, включающего кограничные гомоморфизмы, проверяется непосредственно:

$$\begin{tikzcd}
b' \otimes i^*(v_j) \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & db' \otimes i^*(v_j) \arrow[d, mapsto] \\
p^*(b') \smile v_j \arrow[r, mapsto] & d(p^*(b') \smile v_j) \arrow[r, equal] & p^*(db') \smile v_j,
\end{tikzcd}$$

так как $dv_j = 0$.

Так как имеют место гомотопические эквивалентности $B' \simeq B^{n-1}$ и $E' \simeq p^{-1}(B^{n-1})$, отображение $\varPhi_{E'}$ в диаграмме выше является изоморфизмом по предположению индукции. Докажем, что $\varPhi_{E,E'}$ также является изоморфизмом. Для каждой выбранной точки x_α выберем открытое множество U_α, такое что $x_\alpha \subset U_\alpha \subset e^n_\alpha$ и ограничение расслоения $p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ тривиально. Положим $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и

$U' = U \cap B'$. Мы имеем $H^*(B, B') \cong H^*(U, U')$ в силу вырезания и, аналогично, $H^*(E, E') \cong H^*(p^{-1}(U), p^{-1}(U')) \cong H^*(U \times F, U' \times F)$. Тогда отображение $\varPhi_{E,E'}$ принимает вид

$$\varPhi_{E,E'} \colon H^*(U, U') \otimes_R H^*(F) \to H^*(U \times F, U' \times F).$$

Это изоморфизм согласно относительной версии формулы Кюннета. Теперь тот факт, что $\varPhi_E$ является изоморфизмом (для конечного клеточного B) вытекает из 5-леммы, примененной к диаграмме выше.

В случае произвольного клеточного B рассмотрим n-мерный остов и диграмму

$$\begin{tikzcd}
H^*(B) \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\varPhi"] & H^*(B^n) \otimes_R H^*(F) \arrow[d, "\varPhi_n"] \\
H^*(E) \arrow[r] & H^*(p^{-1}(B^n)).
\end{tikzcd}$$

Здесь горизонтальные отображения являются изоморфизмами в размерностях меньше n, а отображение $\varPhi_n$ является изоморфизмом согласно конечномерному случаю. Следовательно, $\varPhi$ является изоморфизмом в размерностях меньше n. Так как это верно для любого n, доказательство для клеточного B завершено. □

3.2. **Определение и свойства характеристических классов.** Пусть ξ — вещественное n-мерное векторное расслоение $p\colon E \to B$. Его *проективизацией* называется множество $\mathbb{R}P(\xi) = \{\ell \in E_x\}$ всех одномерных подпространств во всех слоях расслоения ξ. Имеется проекция $\mathbb{R}P(p)\colon \mathbb{R}P(\xi) \to B$, переводящая $\ell \in E_x$ в x. Слоем этой проекции над $x \in B$ является проективное пространство слоя E_x. Множество $\mathbb{R}P(\xi)$ отождествляется с факторпространством дополнения до нулевого сечения в E, тем самым на нём вводится топология. Тривиализации $p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ расслоения ξ определяют тривиализации $\mathbb{R}P(p)^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}P^{n-1}$ и тем самым задают на $\mathbb{R}P(\xi)$ структуру локально тривиального расслоения над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Над $\mathbb{R}P(\xi)$ определено *тавтологическое* одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, слоем которого над $\ell \in E_x$ является прямая ℓ (если $B = pt$, то $\gamma(\xi)$ превращается в тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^{n-1}$).

В силу теоремы 2.15 тавтологическое расслоение $\gamma(\xi)$ классифицируется некоторым отображением $f\colon \mathbb{R}P(\xi) \to \mathbb{R}P^\infty$, т. е. $\gamma(\xi) = f^*(\gamma^1_{\mathbb{R}})$, где $\gamma^1_{\mathbb{R}}$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[v]$, где $v \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ — образующая. Таким образом, с расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^1(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$.

Теорема 3.2. *Пусть ξ — вещественное n-мерное векторное расслоение над клеточным пространством B. Тогда кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ от одной образующей $v_\xi \in H^1(\mathbb{R}P(\xi); \mathbb{Z}_2)$ по единственному соотношению*

$$v_\xi^n + w_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \ldots + w_{n-1}(\xi) \cdot v_\xi + w_n(\xi) \cdot 1 = 0, \tag{5}$$

где классы $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \ldots, n$, определяются расслоением ξ.

Доказательство. Применим теорему Лере–Хирша (теорему 3.1) к расслоению $\mathbb{R}P(\xi)$ над B со слоем $\mathbb{R}P^{n-1}$. Первое условие теоремы выполнено автоматически, а для проверки второго условия заметим следующее. Как видно из доказательства теоремы 2.15, классифицирующее отображение $f\colon \mathbb{R}P(\xi) \to \mathbb{R}P^\infty$ тавтологического расслоения $\gamma(\xi)$ задаётся отображением $g\colon E\gamma(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$, которое линейно на слоях. Поэтому ограничение отображения f на слой расслоения $\mathbb{R}P(\xi)$ есть стандартное вложение $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$. Если $i\colon \mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P(\xi)$ — вложение слоя, то $i^*(v_\xi) = i^*(f^*(v)) = v$ — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда $i^*(v_\xi^j) = v^j$ — образующая группы $H^j(\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ для $j = 1,\dots,n-1$.

Из теоремы 3.1 следует, что $H^*(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2)$ является свободным модулем над $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ с образующими $1, v_\xi, \dots, v_\xi^{n-1}$. Соотношение (5) — это разложение элемента $-v_\xi^n$ по базису $1, v_\xi, \dots, v_\xi^{n-1}$, а классы $w_i(\xi)$ — коэффициенты в разложении. □

Классы $w_i(\xi) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$, $i = 1,\dots,n$, задаваемые соотношением (5), называются *характеристическими классами Штифеля–Уитни* n-мерного вещественного векторного расслоения ξ. Также формально положим $w_0(\xi) = 1$.

Аналогично определяется комплексная проективизация $\mathbb{C}P(\xi)$ комплексного n-мерного векторного расслоения ξ, состоящая из всех комплексных одномерных подпространств в слоях. Над $\mathbb{C}P(\xi)$ определено тавтологическое одномерное расслоение $\gamma(\xi)$, которое классифицируется отображением $f\colon \mathbb{C}P(\xi) \to \mathbb{C}P^\infty$. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v]$, но, в отличие от вещественного случая, образующая $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$ определена неоднозначно (имеется две образующие, отличающиеся знаком). Выбор этой образующей определяет вид многих последующих формул. Мы возьмём в качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ класс когомологий, двойственный по Пуанкаре к гиперплоскости $\mathbb{C}P^{N-1} \subset \mathbb{C}P^N$ с канонической ориентацией, происходящей из комплексной структуры. В качестве образующей $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ мы выберем ту, которая ограничивается на $v \in H^2(\mathbb{C}P^N)$ при отображении когомологий, индуцированном вложением $\mathbb{C}P^N \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Таким образом, с комплексным расслоением ξ естественным образом связан класс когомологий $v_\xi = f^*(v) \in H^2(\mathbb{C}P(\xi);\mathbb{Z})$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть ξ — комплексное n-мерное векторное расслоение над клеточным пространством B. Тогда кольцо $H^*(\mathbb{C}P(\xi);\mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B;\mathbb{Z})$ от одной образующей $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi);\mathbb{Z})$ по единственному соотношению*

$$v_\xi^n + c_1(\xi)\cdot v_\xi^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(\xi)\cdot v_\xi + c_n(\xi)\cdot 1 = 0, \tag{6}$$

где классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$, $i = 1,\dots,n$, определяются расслоением ξ.

Классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$, $i = 1,\dots,n$, задаваемые соотношением (6), называются *характеристическими классами Чженя* n-мерного комплексного векторного расслоения ξ. Также формально положим $c_0(\xi) = 1$.

Свойства характеристических классов Штифеля–Уитни и Чженя описываются следующей теоремой (которую мы сформулируем для классов Чженя; формулировка и доказательство для классов Штифеля–Уитни абсолютно аналогичны).

Теорема 3.4. *Имеем*

а) $c_i(\xi) = 0$, *если* $i > \dim\xi$;
б) $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$, *где* $f^*\xi$ — *расслоение, индуцированное отображением* $f\colon B' \to B$;
в) $c_i(\xi\oplus\eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$ *(формула Уитни);*
г) $c_1(\gamma^1) = -v$ *для тавтологического расслоения* γ^1 *над* $\mathbb{C}P^n$.

Доказательство. Свойство а) следует из определения.

Для доказательства б) сначала заметим, что если $\overline{f}\colon \mathbb{C}P(f^*\xi) \to \mathbb{C}P(\xi)$ — отображение проективизаций, индуцированное отображением $f\colon B' \to B$, то $v_{f^*\xi} = \overline{f}^*(v_\xi)$ по определению класса $v_\xi \in H^2(\mathbb{C}P(\xi))$. Запишем (6) для расслоения $f^*\xi$:

$$0 = v_{f^*\xi}^n + c_1(f^*\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \ldots + c_n(f^*\xi) \cdot 1 = 0.$$

С другой стороны, применив $\overline{f}^*$ к (6) для ξ, получим

$$0 = \overline{f}^*(v_\xi^n + c_1(\xi) \cdot v_\xi^{n-1} + \ldots + c_n(\xi) \cdot 1) = v_{f^*\xi}^n + f^*c_1(\xi) \cdot v_{f^*\xi}^{n-1} + \ldots + f^*c_n(\xi) \cdot 1.$$

Так как $1, v_{f^*\xi}, \ldots, v_{f^*\xi}^{n-1}$ — базис свободного $H^*(B')$-модуля $H^*(\mathbb{C}P(f^*\xi))$, из сравнения коэффициентов в последних двух формулах получаем $c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi)$.

Докажем в). Пусть $\dim\xi = n$, $\dim\eta = m$. Рассмотрим вложения $i_\xi\colon \mathbb{C}P(\xi) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$ и $i_\eta\colon \mathbb{C}P(\eta) \hookrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, индуцированные вложением прямых слагаемых в $\xi \oplus \eta$. При этих вложениях тавтологические расслоения над проективизациями ограничиваются друг на друга: $i_\xi^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\xi)$, $i_\eta^*\gamma(\xi \oplus \eta) = \gamma(\eta)$. Следовательно, $i_\xi^* v_{\xi\oplus\eta} = v_\xi$, $i_\eta^* v_{\xi\oplus\eta} = v_\eta$.

Имеем деформационные ретракции

$$U = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\xi) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P(\eta), \quad V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta) \setminus \mathbb{C}P(\eta) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P(\xi),$$

которые задаются послойно как ретракции $\mathbb{C}P^{m+n-1} \setminus \mathbb{C}P^{m-1} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P^{n-1}$.

Теперь рассмотрим следующее соотношение в $H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta))$:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m+n}\Bigl(\sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta) \cdot v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-i}\Bigr)}_{a} = \underbrace{\Bigl(\sum_{j=0}^{n} c_j(\xi) \cdot v_{\xi\oplus\eta}^{n-j}\Bigr)}_{a_1} \underbrace{\Bigl(\sum_{k=0}^{m} c_k(\eta) \cdot v_{\xi\oplus\eta}^{m-k}\Bigr)}_{a_2}.$$

Рассмотрим фрагмент точной последовательности пары $(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V)$:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), V) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & \xrightarrow{i_\xi^*} & H^*(V) \cong H^*(\mathbb{C}P(\xi)) \\ \widetilde{a}_1 & \mapsto & a_1 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Мы имеем $i_\xi^*(a_1) = \sum_{j=0}^n c_j(\xi) \cdot v_\xi^{n-j} = 0$ в силу (6). Поэтому элемент a_1 накрывается элементом $\widetilde{a}_1 \in H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), V)$. Аналогично, для пары $(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U)$ получаем

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & \xrightarrow{i_\eta^*} & H^*(U) \cong H^*(\mathbb{C}P(\eta)) \\ \widetilde{a}_2 & \mapsto & a_2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Из естественности когомологического произведения получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U) \times H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), V) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta), U \cup V) & \quad & \widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) \times H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\mathbb{C}P(\xi\oplus\eta)) & & a_1a_2 \end{array}$$

где верхнее отображение — относительное когомологическое произведение. Но $U \cup V = \mathbb{C}P(\xi \oplus \eta)$, поэтому $H^*(\mathbb{C}P(\xi \oplus \eta), U \cup V) = 0$. Следовательно, $\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 = 0$, а значит и $a = a_1 a_2 = 0$. С другой стороны, соотношение (6) для $\xi \oplus \eta$ даёт

$$\sum_{i=0}^{m+n} c_i(\xi \oplus \eta) \cdot v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-i} = 0.$$

Сравнивая коэффициент при $v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-i}$ в этом соотношении с тем же коэффициентом в соотношении $a = 0$, с учётом того, что $1, v_{\xi\oplus\eta}, \ldots, v_{\xi\oplus\eta}^{m+n-1}$ — базис, получаем $c_i(\xi\oplus\eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$.

Для доказательства г) заметим, что $\mathbb{C}P(\gamma^1) \to \mathbb{C}P^n$ — тождественное отображение, так как γ^1 одномерно. Поэтому $v_{\gamma^1} = v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — выбранная образующая, и соотношение (6) принимает вид $v + c_1(\gamma^1) = 0$. □

Полным классом Чженя комплексного n-мерного расслоения ξ называется (неоднородный) элемент

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \ldots + c_n(\xi) \in H^*(B).$$

Формулу Уитни из теоремы 3.4 в) можно записать в виде

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta).$$

Расслоения ξ и η называются *стабильно эквивалентными*, если $\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k \cong \eta \oplus \underline{\mathbb{C}}^l$ для некоторых k, l. В частности, ξ называется *стабильно тривиальным*, если $\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k \cong \underline{\mathbb{C}}^l$.

Предложение 3.5. *Если ξ и η стабильно эквивалентны, то $c(\xi) = c(\eta)$. В частности, если ξ стабильно тривиально, то $c(\xi) = 1$.*

Доказательство. Заметим, что если $\xi \cong \underline{\mathbb{C}}^k$ (тривиально), то $c(\xi) = 1$. Это следует из того, что тривиальное расслоение над B классифицируется отображением $B \to pt$ и утверждения б) теоремы 3.4. Теперь предложение следует из формулы Уитни. □

Предложение 3.6. *Пусть ξ и η — одномерные комплексные расслоения над B. Тогда*

$$c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $B = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, $\xi = p_1^*\gamma$, $\eta = p_2^*\gamma$, где γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$, $p_1, p_2 \colon \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ — проекции. Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2]$ и $c_1(\xi \otimes \eta) = k_1 v_1 + k_2 v_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Для вложения $i_1 \colon \mathbb{C}P^\infty \times pt \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_1^*(\xi \otimes \eta) = \gamma$. Следовательно, $i_1^*(c_1(\xi \otimes \eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_1 = -1$. Аналогично, для вложения $i_2 \colon pt \times \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ имеем $i_2^*(c_1(\xi\otimes\eta)) = c_1(\gamma) = -v$ и $k_2 = -1$. Следовательно, $c_1(\xi\otimes\eta) = -v_1 - v_2 = c_1(\xi) + c_1(\eta)$.

В случае произвольных ξ, η воспользуемся функториальностью. Пусть ξ классифицируется отображением $f \colon B \to \mathbb{C}P^\infty$, а η классифицируется отображением $g \colon B \to \mathbb{C}P^\infty$. Положим $h = (f, g) \colon B \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, тогда $\xi = f^*\gamma = h^*(p_1^*\gamma)$ и $\eta = g^*\gamma = h^*(p_2^*\gamma)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} c_1(\xi \otimes \eta) = c_1\bigl(h^*(p_1^*\gamma) \otimes h^*(p_2^*\gamma)\bigr) = h^*\bigl(c_1((p_1^*\gamma) \otimes (p_2^*\gamma))\bigr) = h^*\bigl(c_1(p_1^*\gamma) + c_1(p_2^*\gamma)\bigr) = \\ = c_1(h^*(p_1^*\gamma)) + c_1(h^*(p_2^*\gamma)) = c_1(\xi) + c_1(\eta). \end{aligned}$$ □

В следующем разделе мы обсудим, как выводить формулы для классов Чженя тензорного произведения произвольных расслоений.

3.3. **Принцип расщепления. Многообразия флагов. Единственность характеристических классов.** Принцип расщепления, неформально говоря, заключается в том, что все свойства характеристических классов, выполняемые для расслоений, расщепляющихся в сумму одномерных расслоений, выполняются и для любых расслоений. В основе этого принципа лежит следующая теорема.

Теорема 3.7. *Пусть ξ — n-мерное комплексное расслоение над клеточной базой B. Тогда существует B' и отображение $f\colon B' \to B$, такое что $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ (сумма одномерных расслоений) и $f^*\colon H^*(B) \to H^*(B')$ — мономорфизм.*

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму индуцированных расслоений:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \ldots \oplus \gamma_n & \to & \ldots & \to & \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \xi_2 & \to & \gamma_1 \oplus \xi_1 & \to & \xi_0 = \xi \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B_n = \mathbb{C}P(\xi_{n-1}) & \xrightarrow{f_n} & \ldots & \to & B_2 = \mathbb{C}P(\xi_1) & \xrightarrow{f_2} & B_1 = \mathbb{C}P(\xi_0) & \xrightarrow{f_1} & B_0 = B
\end{array}$$

Здесь f_i — проекция проективизации расслоения ξ_{i-1} над B_{i-1}. На первом шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$ при помощи отображения f_1. Это индуцированное расслоение $f_1^*\xi_0$ содержит в качестве подрасслоения одномерное расслоение γ_1 — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_0)$. Ортогональное дополнение к γ_1 в $f_1^*\xi$ обозначим через ξ_1, так что $f_1^*\xi_0 = \gamma_1 \oplus \xi_1$. На втором шаге мы индуцируем расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$ при помощи отображения f_2. Это индуцированное расслоение $f_2^*(\gamma_1 \oplus \xi_1)$ содержит в качестве подрасслоений уже два одномерных расслоения — расслоение $f_2^*\gamma_1$, которое мы продолжаем обозначать γ_1, и тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_1)$, которое мы обозначаем γ_2. Их ортогональное дополнение обозначим через ξ_2. И так далее. На последнем, n-шаге мы получаем, что γ_n — это тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi_{n-1})$. Каждое из отображений f_i индуцирует мономорфизм в когомологиях в силу теоремы Лере–Хирша. Утверждение теоремы получается, если положить $B' = B_n$ и $f = f_1 \circ \ldots \circ f_n$. □

Более явно конструкцию отображения $f\colon B' \to B$ и расщепления $f^*\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ из теоремы 3.7 можно описать на основе понятия многообразия флагов.

Напомним, что (полным) *флагом* в $\mathbb{C}^n$ называется последовательность вложенных подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset U_n = \mathbb{C}^n, \qquad \dim U_i = i.$$

Множество всех флагов в $\mathbb{C}^n$ является комплексным многообразием размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Оно называется *многообразием флагов* и обозначается $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\mathbb{C}^n)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \ldots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$; слоем расслоения γ^i над данным флагом является его i-е подпространство U_i (так что расслоение γ^n тривиально).

Флагизацией n-мерного комплексного расслоения ξ над B называется множество $Fl(\xi)$ всех флагов во всех слоях расслоения ξ. Проекция $Fl(\xi) \to B$ является локально тривиальным расслоением со слоем $Fl(\mathbb{C}^n)$. Над многообразием $Fl(\xi)$ имеется n тавтологических расслоений $\gamma^1, \ldots, \gamma^n$, $\dim \gamma^i = i$.

Теорема 3.8. *Пусть ξ — n-мерное комплексное расслоение над клеточной базой B и пусть $f\colon Fl(\xi) \to B$ — проекция флагизации расслоения ξ. Тогда*

$$f^*\xi \cong \gamma^1 \oplus (\gamma^2/\gamma^1) \oplus \ldots \oplus (\gamma^n/\gamma^{n-1})$$

и $f^*\colon H^*(B) \to H^*(Fl(\xi))$ — мономорфизм.

Доказательство. Из конструкции пространства B' в доказательстве теоремы 3.7 следует, что точка в B' задаётся последовательным выбором n одномерных подпространств $\ell_1 \subset E_x$, $\ell_2 \subset E_x/\ell_1, \ldots, \ell_n \subset E_x/(\ell_1 \oplus \ldots \oplus \ell_{n-1})$ в слое $E_x \cong \mathbb{C}^n$ расслоения ξ. Каждый такой набор n одномерных подпространств задаёт флаг $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ в E_x, где $U_i = \ell_1 \oplus \ldots \oplus \ell_i$. Обратно, каждый флаг $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ в E_x задаёт набор одномерных подпространств $\ell_i = U_i/U_{i-1}$. Поэтому пространство B' из теоремы 3.7 отождествляется с $Fl(\xi)$, а одномерные расслоения $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ над B' отождествляются с расслоениями $\gamma^1, \gamma^2/\gamma^1, \ldots, \gamma^n/\gamma^{n-1}$ над $Fl(\xi)$. □

Аналоги теорем 3.7 и 3.8 имеет место и для вещественных расслоений и когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

Следствием является теорема единственности для характеристических классов.

Теорема 3.9. *Каждому комплексному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $c_i(\xi) \in H^{2i}(B)$, удовлетворяющих свойствам а)–г) из теоремы 3.4.*

Аналогично, каждому вещественному векторному расслоению ξ над клеточной базой B можно единственным образом сопоставить набор классов $w_i(B) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих аналогам свойств а)–г) из теоремы 3.4 для классов Штифеля–Уитни.

Доказательство. Свойства а) и г) однозначно задают классы c_i для универсального одномерного расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$. Тогда свойство б) однозначно задаёт классы c_i для любого одномерного расслоения над B, так как такое расслоение классифицируется некоторым отображением $f\colon B \to \mathbb{C}P^\infty$. Далее, свойство в) однозначно задаёт классы c_i для сумм одномерных расслоений. Тогда из принципа расщепления следует, что классы c_i определены однозначно для любых расслоений над клеточной базой B. Действительно, если $\{c_i' \in H^{2i}(B)\}$ — другой набор классов, удовлетворяющих свойствам а)–г), то для отображения $f\colon B' \to B$ из теоремы 3.7 имеем $f^*(c_i'(\xi)) = c_i'(f^*\xi) = c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$ в $H^{2i}(B')$, так как $f^*\xi$ — сумма одномерных расслоений. Так как $f^*\colon H^*(B) \to H^*(B')$ — мономорфизм, отсюда следует, что $c_i'(\xi) = c_i(\xi)$. □

Если $\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ — сумма одномерных расслоений, то

$$c(\xi) = (1+t_1)\cdot\ldots\cdot(1+t_n), \quad \text{где } t_i = c_1(\lambda_i). \tag{7}$$

Отсюда $c_i(\xi) = \sigma_i(t_1, \ldots, t_n)$ — i-й элементарный симметрический многочлен от $t_1, \ldots, t_n$. Таким образом, принцип расщепления позволяет рассматривать характеристические классы n-мерного расслоения как симметрические многочлены от формальных переменных $t_1, \ldots, t_n$.

Пример 3.10. Получим на основе принципа расщепления формулу для первого класса Чженя тензорного произведения двух расслоений. Пусть $\dim\xi = n$ и $\dim\eta = m$. Можно считать, что $\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ и $\eta = \mu_1 \oplus \ldots \oplus \mu_m$ (суммы одномерных расслоений). Тогда

$$c_1(\xi\otimes\eta)=c_1\Big(\bigoplus_{i=1}^n\lambda_i\otimes\bigoplus_{j=1}^m\mu_j\Big)=c_1\Big(\bigoplus_{i,j}(\lambda_i\otimes\mu_j)\Big)=\sum_{i,j}c_1(\lambda_i\otimes\mu_j)=$$
$$=\sum_{i,j}(c_1(\lambda_i)+c_1(\mu_j))=m\sum_{i=1}^n c_1(\lambda_i)+n\sum_{j=1}^m c_1(\mu_j)=mc_1(\xi)+nc_1(\eta),$$

где в третьем равенстве мы воспользовались формулой Уитни для c_1, а в четвёртой — формулой для c_1 от тензорного произведения одномерных расслоений (предложение 3.6).

3.4. **Когомологии многообразий Грассмана.** Здесь мы покажем, что кольцо когомологий многообразия Грассмана $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами Чженя тавтологического расслоения γ_N^k и опишем соотношения между этими классами. Отсюда будет следовать, что кольцо когомологий бесконечномерного грассманиана $G_k(\mathbb{C}^\infty)=BU(n)$ порождается классами $c_1(\gamma^k),\ldots,c_k(\gamma^k)$ без соотношений, т. е. $H^*(BU(n))\cong\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]$ — кольцо многочленов.

Наряду с тавтологическим расслоением γ_N^k будем рассматривать его ортогональное дополнение — $(N-k)$-мерное расслоение $(\gamma_N^k)^\perp$, слоем которого над $\pi\in G_k(\mathbb{C}^N)$ является ортогональное дополнение $\pi^\perp$ к π в $\mathbb{C}^N$. Обозначим для краткости $c_i=c_i(\gamma_N^k)$ и $c_j^\perp=c_j((\gamma_N^k)^\perp)$. Так как $\gamma_N^k\oplus(\gamma_N^k)^\perp\cong\underline{\mathbb{C}}^N$, получаем

$$c\cdot c^\perp=(1+c_1+\ldots+c_k)(1+c_1^\perp+c_2^\perp+\ldots)=1.$$

Отсюда следует, что каждый класс $c_j^\perp$ является многочленом от классов $c_1,\ldots,c_k$.

Кольцо когомологий $G_k(\mathbb{C}^N)$ порождается классами $c_1,\ldots,c_k$, а все соотношения между ними вытекают из «размерностных» соотношений $c_j^\perp=0$ при $j>N-k$.

Теорема 3.11. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(G_k(\mathbb{C}^N))\cong\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]/(c_j^\perp=0\ \textit{при}\ j>N-k).$$

Доказательство. Ясно, что определён гомоморфизм колец

$$\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]/(c_j^\perp=0\text{ при }j>N-k)\to H^*(G_k(\mathbb{C}^N)),$$

переводящий c_i в $c_i(\gamma_N^k)\in H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$. Докажем индукцией по k, что это — изоморфизм. При $k=1$ имеем $H^*(G_1(\mathbb{C}^N))=H^*(\mathbb{C}P^{N-1})\cong\mathbb{Z}[v]/(v^N=0)$ и $c_1=c_1(\gamma_N^1)=-v$. Тогда $c=1-v$ и $c^\perp=\frac{1}{1-v}=1+v+v^2+\ldots$ Таким образом, соотношение $v^N=0$ эквивалентно соотношениям $c_j^\perp=0$ при $j>N-1$.

Предположим теперь, что утверждение доказано для $G_{k-1}(\mathbb{C}^N)$. Проективизация $\mathbb{C}P(\gamma_N^k)$ отождествляется с проектвизацией $\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$ следующим образом. Для прямой ℓ, лежащей в k-плоскости π^k, рассмотрим дополнительную $(k-1)$-плоскость π^{k-1}, т. е. $\pi^k=\ell\oplus\pi^{k-1}$. Тогда ℓ можно рассматривать как прямую в $(\pi^{k-1})^\perp$. Отсюда получаем

$$\mathbb{C}P(\gamma_N^k)=\{\ell\colon\ell\subset\pi^k\subset\mathbb{C}^N\}=\{\ell\colon\ell\subset(\pi^{k-1})^\perp\subset\mathbb{C}^N\}=\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp).$$

Пусть $p\colon\mathbb{C}P(\gamma_N^k)\to G_k(\mathbb{C}^N)$ и $p^\perp\colon\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)\to G_{k-1}(\mathbb{C}^N)$ — проекции и пусть γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k)=\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$. Тогда

$$p^*(\gamma_N^k)=\xi\oplus\gamma,\quad(p^\perp)^*((\gamma_N^{k-1})^\perp)=\gamma\oplus\zeta,$$

где ξ — некоторое $(k-1)$-мерное, а ζ — $(N-k)$-мерное расслоение над $\mathbb{C}P(\gamma_N^k) = \mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)$. При этом $p^*((\gamma_N^k)^\perp) = \zeta$ и $(p^\perp)^*(\gamma_N^{k-1}) = \xi$, т. е.

$$\xi \oplus \gamma \oplus \zeta = p^*(\gamma_N^k \oplus (\gamma_N^k)^\perp) = p^*(\underline{\mathbb{C}}^N) = \underline{\mathbb{C}}^N.$$

По теореме Лере–Хирша $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ есть свободный $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$-модуль с базисом $1, v, \ldots, v^{k-1}$, где $v = -c_1(\gamma)$, и соотношением

$$v^k + p^*(c_1(\gamma_N^k))v^{k-1} + \ldots + p^*(c_k(\gamma_N^k)) = 0. \tag{8}$$

Из равенства $p^*(\gamma_N^k) = \xi \oplus \gamma$ получаем

$$1 + c_1(p^*\gamma_N^k) + c_2(p^*\gamma_N^k) + \ldots = (1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \ldots)(1 - v),$$

так что соотношение (8) можно записать как $c_k(\xi) = 0$.

Аналогично, $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp))$ есть свободный $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$-модуль с базисом $1, v, \ldots, v^{N-k}$ и соотношением $c_{N-k+1}(\zeta) = 0$.

По предположению индукции, $H^*(G_{k-1}(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^{k-1}), \ldots, c_{k-1}(\gamma_N^{k-1})$ с соотношениями $c_i((\gamma_N^{k-1})^\perp) = 0$ при $i > N-k+1$. Следовательно, кольцо $H^*(\mathbb{C}P((\gamma_N^{k-1})^\perp)) = H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ порождается классами $c_i(\xi)$, $c_1(\gamma) = -v$ и $c_j(\zeta)$, а все соотношения между ними происходят из равенств $c(\xi \oplus \gamma \oplus \zeta) = 1$, $c_i(\xi) = 0$ при $i \geqslant k$ и $c_j(\zeta) = 0$ при $j \geqslant N-k+1$, т. е. из тривиальности расслоения $\xi \oplus \gamma \oplus \zeta$ и размерности расслоений ξ, ζ. Это означает, что $H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ является свободным модулем над своим подкольцом R, порождённым классами $c_1(\xi \oplus \gamma), \ldots, c_k(\xi \oplus \gamma)$, с базисом $1, v, \ldots, v^{k-1}$. С другой стороны, при мономорфизме $p^* \colon H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \to H^*(\mathbb{C}P(\gamma_N^k))$ имеем $p^*(c_i(\gamma_N^k)) = c_i(\xi \oplus \gamma)$, так что $p^*\bigl(H^*(G_k(\mathbb{C}^N))\bigr) = R$ и $H^*(G_k(\mathbb{C}^N))$ порождается классами $c_1(\gamma_N^k), \ldots, c_k(\gamma_N^k)$ с соотношениями, происходящими из размерности расслоения $(\gamma_N^k)^\perp$. □

Теперь рассмотрим бесконечномерный грассманиан $BU(k) = G_k(\mathbb{C}^\infty)$.

Теорема 3.12. *Имеет место изоморфизм*

$$H^*(BU(k)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k].$$

Доказательство. Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k] \to H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty)) \to H^*(G_k(\mathbb{C}^N)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k]/(c_j^\perp = 0 \text{ при } j > N-k).$$

Здесь первый гомоморфизм переводит c_i в $c_i(\gamma^k)$, второй индуцирован вложением $G_k(\mathbb{C}^N) \hookrightarrow G_k(\mathbb{C}^\infty)$, а третий — изоморфизм из теоремы 3.11. Грассманиан $G_k(\mathbb{C}^N)$ является клеточным подкомплексом в $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ относительно разбиения на клетки Шуберта (теорема 2.10), при этом $2(N-k)$-мерные остовы $G_k(\mathbb{C}^N)$ и $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ совпадают (предложение 2.11). Поэтому второй гомоморфизм в композиции выше является изоморфизмом в размерностях $< 2(N-k)$. Вся композиция является изоморфизмом в размерностях $\leqslant 2(N-k)$, так как первое соотношение $c_j^\perp = 0$ появляется в размерности $2(N-k+1)$. Следовательно, первый гомоморфизм также является изоморфизмом в размерностях $< 2(N-k)$. Так как это верно для любого N, получаем, что $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k] \to H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty))$ — изоморфизм. □

Комплексное n-мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f \colon B \to BU(n)$, и мы имеем $c_i(\xi) = f^*(c_i)$. В связи с этим классы $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ называются *универсальными характеристическими классами Чженя.*

Следующее утверждение описывает флагизацию универсального (тавтологического расслоения) γ^n над $BU(n)$ и даёт геометрическую интерпретацию формальных переменных $t_1, \ldots, t_n$ из принципа расщепления, см. (7).

Теорема 3.13.

а) *Мы имеем* $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, *причём проекция флагизации* $Fl(\gamma^n) \to BU(n)$ *гомотопна отображению* $f\colon (\mathbb{C}P^\infty)^n \to BU(n)$, *классифицирующему декартово произведение* n *экземпляров тавтологического расслоения* γ^1 *над* $\mathbb{C}P^\infty$.

б) *Гомоморфизм* $f^*\colon H^*(BU(n)) \to H^*((\mathbb{C}P^\infty)^n)$ *имеет вид*

$$\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n] \to \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n], \qquad c_i \mapsto \sigma_i(t_1, \ldots, t_n),$$

т. е. переводит универсальный класс Чженя c_i *в* i*-й симметрический многочлен от образующих* $t_1, \ldots, t_n$.

Доказательство. Точками пространства $Fl(\gamma^n)$ являются флаги длины n в $\mathbb{C}^\infty$, а точками пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^n$ являются последовательности из n прямых в $(\mathbb{C}^\infty)^n \cong \mathbb{C}^\infty$. Взаимно обратные гомотопические эквивалентности $Fl(\gamma^n) \to (\mathbb{C}P^\infty)^n$ и $(\mathbb{C}P^\infty)^n \to Fl(\gamma^n)$ сопосталяют флагу набор прямых и обратно, аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 3.8. Подробности оставим в качестве задачи.

Докажем б). Пусть $p_i\colon (\mathbb{C}P^\infty)^n \to \mathbb{C}P^\infty$ — проекция на i-й сомножитель, $t = c_1(\gamma^1) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ и $t_i = p_i^*(t)$. Тогда $H^*((\mathbb{C}P^\infty)^n) = \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ и $c((\gamma^1)^n) = (1 + t_1) \cdot \ldots \cdot (1 + t_n)$. Имеем $f^*(c_i) = c_i(f^*\gamma^n) = c_i((\gamma^1)^n) = \sigma_i(t_1, \ldots, t_n)$. ☐

Аналоги всех результатов этого параграфа имеют место для классов Штифеля–Уитни и когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$:

Теорема 3.14. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^*(G_k(\mathbb{R}^N); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_k]/(w_j^\perp = 0 \text{ при } j > N - k),$$
$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_n].$$

3.5. **Параллелизуемость вещественных проективных пространств. Алгебры с делением.** Одним из приложений классов Штифеля–Уитни является доказательство несуществования алгебр с делением в размерностях, отличных от 2^k. Как мы увидим, этот вопрос непосредственно связан с параллелизуемостью вещественных проективных пространств.

Классами Штифеля–Уитни гладкого многообразия M будем называть классы Штифеля–Уитни его касательного расслоения: $w_i(M) = w_i(\mathcal{T}M)$.

Предложение 3.15.

а) $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + t)^{n+1}$ *в кольце* $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$;

б) $w(\mathbb{R}P^n) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $n = 2^k - 1$ *для целого* $k \geqslant 0$.

Доказательство. Согласно теореме 2.7, имеем $\mathcal{T}\mathbb{R}P^n \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \gamma^{\oplus(n+1)}$, откуда $w(\mathbb{R}P^n) = w(\gamma)^{n+1} = (1 + t)^{n+1}$, где $t = w_1(\gamma) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ — первый класс Штифеля–Уитни тавтологического расслоения.

Докажем б). Пусть $n + 1 = 2^k$. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + t)^{2^k} = 1 + t^{2^k} = 1$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$. Пусть теперь $n + 1 = 2^k \cdot m$, где $m > 1$ нечётно. Тогда $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + t)^{2^k \cdot m} = (1 + t^{2^k})^m = 1 + mt^{2^k} + \ldots \neq 1$, так как $t^{2^k} \neq 0$. ☐

Напомним, что многообразие называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально.

Следствие 3.16. *Если $\mathbb{R}P^n$ параллелизуемо, то $n = 2^k - 1$ для целого $k \geqslant 0$.*

Теорема 3.17 (Штифель)**.** *Предположим, что на $\mathbb{R}^n$ существует билинейное умножение $m\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ без делителей нуля (ассоциативность и существование единицы не предполагается). Тогда $\mathbb{R}P^{n-1}$ параллелизуемо, т. е. $n = 2^k$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда $r_i\colon y \mapsto m(y, e_i)$ задаёт изоморфизм $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, так как умножение m без делителей нуля. Рассмотрим изоморфизмы $v_i = r_i \circ r_1^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ линейно независимы при $x \neq 0$ и $v_1 = \mathrm{id}$. Действительно, если $0 = \lambda_1 v_1(x) + \ldots + \lambda_n v_n(x)$, то $0 = \lambda_1 r_1(y) + \ldots + \lambda_n r_n(y) = m(y, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)$, где $y = r_1^{-1}(x) \neq 0$, откуда $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$.

Рассмотрим теперь морфизмы расслоений

$$\widetilde{v}_i\colon \gamma \to \gamma^\perp, \quad (\ell, x) \mapsto (\ell^\perp, \mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)),$$

где $x \in \ell \subset \mathbb{R}^n$, а $\mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_i(x)$ — проекция вектора $v_i(x)$ на $\ell^\perp$. Тогда $\mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_1(x) = 0$, а векторы $\mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_2(x), \ldots, \mathrm{pr}_{\ell^\perp} v_n(x)$ линейно независимы в $\ell^\perp$ при $x \neq 0$. Следовательно, $\widetilde{v}_2, \ldots, \widetilde{v}_n$ суть $(n-1)$ линейно независимых сечений расслоения $\mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp) = \mathcal{T}\mathbb{R}P^{n-1}$. Поэтому это расслоение тривиально. □

Пространства $\mathbb{R}P^0 = pt$, $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^7$ параллелизуемы, так как на $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^8$ имеется билинейное умножение без делителей нуля (вещественные числа, комплексные числа, кватернионы и октонионы Кэли, соответственно). При $k \geqslant 4$ пространство $\mathbb{R}P^{2^k-1}$ не параллелизуемо, и поэтому других билинейных умножений без делителей нуля на $\mathbb{R}^n$ нет. Этот факт был доказан в 1960 году Дж. Адамсом методами алгебраической топологии.

3.6. **Препятствия к вложениям и погружениям многообразий.** Ещё одно приложение характеристических классов Штифеля–Уитни заключается в построении препятствий к вложениям и погружениям многообразий в евклидово пространство.

Напомним, что гладкое отображение гладких многообразий $f\colon M \to N$ называется *погружением* (обозначается $M \looparrowright N$), если его дифференциал $D_x f\colon \mathcal{T}_x M \to \mathcal{T}_{f(x)} N$ инъективен в каждой точке $x \in M$. Погружение $f\colon M \to N$ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ $f(M)$ (в топологии, индуцированной из N). Если M компактно, то погружение является вложением тогда и только тогда, когда оно инъективно.

Нормальное расслоение $\nu = \nu(M \looparrowright N)$ погружения $f\colon M \looparrowright N$ определяется как $(f^*\mathcal{T}N)/\mathcal{T}M$. Введя риманову метрику на $\mathcal{T}N$, слой расслоения $\nu(M \looparrowright N)$ в точке $x \in M$ можно отождествить с ортогональным дополнением к подпространству $D_x f(\mathcal{T}_x M)$ в $\mathcal{T}_{f(x)} N$. Имеет место разложение

$$f^*\mathcal{T}N \cong \mathcal{T}M \oplus \nu(M \looparrowright N).$$

Из дифференциальной геометрии известна

Теорема 3.18 (Уитни)**.** *Гладкое компактное многообразие M размерности $n > 1$ можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Когда M^n можно погрузить в евклидово пространство меньшей размерности? Пусть задано погружение $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ с нормальным расслоением ν. Тогда мы имеем $\mathcal{T}M \oplus \nu = \underline{\mathbb{R}}^{n+k}$, откуда $w(M) \cdot w(\nu) = 1$. Мы будем обозначать характеристический класс $w(\nu)$ нормального расслоения через $w^{\perp}(M)$. Он зависит только от характеристических классов многообразия M, так как имеет место формула формального обращения

$$w^{\perp}(M) = 1 + w_1^{\perp}(M) + w_2^{\perp}(M) + \ldots = \frac{1}{1 + w_1(M) + w_2(M) + \ldots}$$

Например,

$$w_1^{\perp}(M) = -w_1(M), \quad w_2^{\perp}(M) = w_1^2(M) - w_2(M),$$
$$w_3^{\perp}(M) = -w_1^3(M) + 2w_1(M)w_2(M) - w_3(M), \ldots$$

(при формальном обращении ряда некоторое слагаемые получаются со знаком минус, как в формулах выше, но так как мы работаем с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, эти знаки можно опустить). Так как расслоение $\nu = \nu(M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k})$ имеет размерность k, мы получаем $w_i^{\perp}(M) = 0$ при $i > k$. Это может давать ограничения на k.

Пример 3.19. Рассмотрим $M = \mathbb{R}P^9$. Тогда

$$w(\mathbb{R}P^9) = (1+t)^{10} = 1 + t^2 + t^8, \quad w^{\perp}(\mathbb{R}P^9) = \frac{1}{1 + t^2 + t^8} = 1 + t^2 + t^4 + t^6.$$

Так как $w_6^{\perp}(\mathbb{R}P^9) \neq 0$, получаем, что $\mathbb{R}P^9$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{9+5} = \mathbb{R}^{14}$. Согласно теореме Уитни, $\mathbb{R}P^9$ погружается в $\mathbb{R}^{17}$.

В некоторых случая оценка из теоремы Уитни оказывается точной.

Теорема 3.20 (Милнор). *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$w(\mathbb{R}P^{2^k}) = (1+t)^{2^k+1} = (1+t)^{2^k}(1+t) = (1+t^{2^k})(1+t) = 1 + t + t^{2^k},$$
$$w^{\perp}(\mathbb{R}P^{2^k}) = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{2^k-1}.$$

Предположим, что существует погружение $\mathbb{R}P^{2^k} \looparrowright \mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$. Тогда его нормальное расслоение ν имеет размерность $2^{k+1} - 2 - 2^k = 2^k - 2$. Но $w_{2^k-1}(\nu) = w_{2^k-1}^{\perp}(\mathbb{R}P^{2^k}) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. $\square$

Сравнивая с примером 3.19, получаем, что не только $\mathbb{R}P^9$, но даже $\mathbb{R}P^8$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{14}$. В общем случае нахождение минимальной размерности погружения проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ является трудной задачей, которая полностью не решена до сих пор.

Задачи и упражнения.

3.21. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством B, причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi \otimes \gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

3.22. Рассмотрим отображение $q\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

3.23. Докажите следующую относительную версию теоремы Лере–Хирша. Пусть дана пара локально тривиальных расслоений $(F, F') \xrightarrow{i} (E, E') \xrightarrow{p} B$ над одной базой B. Предположим, что

1) $H^k(F, F'; R)$ — конечно-порождённый свободный R-модуль для любого k;
2) существуют классы $v_j \in H^*(E, E'; R)$, такие что их ограничения $i^*(v_j)$ на любой слой (F, F') дают R-базис в $H^*(F, F'; R)$.

Тогда $H^*(E, E'; R)$ является свободным $H^*(B; R)$-модулем с базисом $\{v_j\}$.

3.24. Приведите пример локально тривиального расслоения $E \to B$, для которого

а) не выполнено второе из условий теоремы Лере–Хирша (т. е. $H^*(F; R)$ является конечно порождённым свободным R-модулем, но не существует набора классов в $H^*(E; R)$, которые ограничиваются на базис в когомологиях слоя);
б) выполнены условия теоремы Лере–Хирша, но отсутствует изоморфизм колец $H^*(E; R) \cong H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$.

3.25. Докажите, что для колец когомологий унитарной и специальной унитарной групп имеют место изоморфизмы:

$$H^*(U(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_1, u_2, \ldots, u_n], \qquad H^*(SU(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_2, \ldots, u_n], \qquad \dim u_i = 2i - 1$$

(справа стоят внешние алгебры от нечётномерных образующих). *Указание:* используйте расслоение $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ и теорему Лере–Хирша. Что можно сказать о когомологиях группы $O(n)$, используя тот же метод?

3.26. Вычислите

а) кольцо когомологий многообразия $L(n, m) = \mathbb{C}P(\gamma \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)$, где γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\underline{\mathbb{C}}^m$ — тривиальное m-мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$;
б) кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$ для произвольных целых чисел $i_1, \ldots, i_k$;
в) полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$.

3.27. Пусть $0 \leqslant k \leqslant l$ — натуральные числа. Определим *многообразие Милнора*

$$H_{kl} = \big\{([z_0 : \cdots : z_k], [w_0 : \cdots : w_l]) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \colon z_0 w_0 + \ldots + z_k w_k = 0\big\}.$$

а) Докажите, что H_{kl} является сечением образа *вложения Серге*
$$\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \hookrightarrow \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1},$$
$$([z_0 : \cdots : z_k], [w_0 : \cdots : w_l]) \mapsto [z_0 w_0 : \cdots : z_i w_j : \cdots : z_k w_l]$$
гиперплоскостью $H \subset \mathbb{C}P^{(k+1)(l+1)-1}$ общего положения.
б) Вычислите кольцо когомологий многообразия H_{ij}.

3.28. Пусть ξ — m-мерное, а η — n-мерное комплексные расслоения. Пользуясь принципом расщепления, выразите классы Чженя $c_2(\xi \otimes \eta)$, $c_1(S^2\xi)$, $c_2(S^2\xi)$, $c_1(\Lambda^2\xi)$, $c_2(\Lambda^2\xi)$ через классы Чженя расслоений ξ и η. Здесь $S^i\xi$ обозначает i-симметрическую степень расслоения ξ, а $\Lambda^i\xi$ обозначает i-ю внешнюю степень.

3.29. Запишем $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ (i-я симметрическая функция формальных переменных). Докажите, что полные классы Чженя симметрической и внешней степени расслоения ξ выражаются по формулам

$$c(\Lambda^k\xi) = \prod_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}(1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})), \quad c(S^k\xi) = \prod_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n}(1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})).$$

3.30. Задайте в явном виде образующими и соотношениями кольца целочисленных когомологий грассманианов $G_2(\mathbb{C}^4)$, $G_2(\mathbb{C}^5)$, $G_3(\mathbb{C}^5)$.

3.31. Докажите, что $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём проекция флагизации $Fl(\gamma^n) \to BU(n)$ гомотопна отображению $f\colon (\mathbb{C}P^\infty)^n \to BU(n)$, классифицирующему декартово произведение n экземпляров тавтологического расслоения γ^1 над $\mathbb{C}P^\infty$.

3.32. Докажите, что числа Бетти (ранги групп целочисленных гомологий) многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяют соотношениям $\beta_{2i+1}(Fl(\mathbb{C}^n)) = 0$ и

$$\sum_i \beta_{2i}(Fl(\mathbb{C}^n))t^{2i} = \prod_{i=1}^{n-1}(1 + t^2 + \ldots + t^{2i}).$$

3.33. Докажите, что кольцо когомологий многообразия флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ описывается следующим образом:

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

где $\dim t_i = 2$, а σ_i есть i-я элементарная симметрическая функция от $t_1, \ldots, t_n$.

3.34. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение. Докажите, что если $w(\xi) \neq 1$, то число $\min\{i\colon w_i(\xi) \neq 0\}$ есть степень двойки.

3.35. Докажите, что для комплексного расслоения ξ число $\min\{i\colon c_i(\xi) \neq 0\}$ может быть любым.

3.36. Пусть γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Докажите, что не существует векторного расслоения ζ над $\mathbb{R}P^\infty$ такого, что $\gamma \oplus \zeta$ тривиально.

3.37. Докажите, что если многообразие M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$, то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$.

4. Класс Эйлера и класс Тома

4.1. **Ориентируемые векторные расслоения.** Рассмотрим вещественное векторное n-мерное расслоение ξ, заданное проекцией $p\colon E \to B$ с тривиализующим покрытием $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, тривиализациями $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и отображениями перехода $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$.

Выбор ориентации в слое $E_x = p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ над точкой $x \in B$ эквивалентен выбору одной из двух образующих группы $H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. В связи с этим будем называть образующую $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ *ориентацией* слоя E_x. Для группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (соответствующей слою тривиального расслоения) имеется канонический выбор образующей $\mu_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, которая задаётся сингулярным симплексом $[v_0, \ldots, v_n] \to \mathbb{R}^n$ с вершинами $v_0 = -e_1 - \ldots - e_n$, $v_1 = e_1, \ldots, v_n = e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в каждом слое расслоения ξ называется *согласованным* относительно открытого покрытия $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha \colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, если для любых U_α и $x \in U_\alpha$ изоморфизм

$$H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \xrightarrow{(\varphi_\alpha|_{E_x})_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \tag{9}$$

переводит μ_x в μ_0.

Векторное расслоение ξ называется *ориентируемым*, если существует открытое покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с тривиализациями $\varphi_\alpha \colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ и согласованный выбор ориентаций $\mu_x \in H_n(E_x, E_x \setminus \{0\})$, $x \in B$, относительно этого покрытия.

Предложение 4.1. *Вещественное векторное n-мерное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда оно допускает тривиализующее покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ с отображениями перехода $g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL^+(n, \mathbb{R})$, где $GL^+(n, \mathbb{R})$ — группа невырожденных матриц с положительным определителем.*

Доказательство. Если ξ ориентируемо, то из (9) получаем, что для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ гомоморфизм

$$g_{\alpha\beta}(x)_* = ((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{x \times \mathbb{R}^n})_* \colon H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

переводит μ_0 в μ_0, а значит линейный изоморфизм $g_{\alpha\beta}(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию, т. е. имеет положительный определитель. Обратно, если $g_{\alpha\beta}(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет положительный определитель для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\mu_x := (\varphi_\alpha^{-1}|_{E_x})_* \mu_0$ задаёт согласованный выбор ориентаций в слоях. $\square$

Если M — гладкое многообразие, то группа локальных гомологий $H_n(M, M \setminus x)$, используемая в определении ориентации на M, отождествляется с группой $H_n(\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus \{0\})$ при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}_x M \to M$, которое является диффеоморфизмом в окрестности точки $x \in M$. Отсюда получаем

Предложение 4.2. *Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. Следующие условия эквивалентны:*

1) *многообразие M ориентируемо;*
2) *касательное расслоение $\mathcal{T}M$ ориентируемо;*
3) *существует гладкий атлас $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, для которого отображения замены координат $\psi_{\alpha\beta} \colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ удовлетворяют условию $\det \operatorname{Jac}_x \psi_{\alpha\beta} > 0$ для любого $x \in M$.*

4.2. **Класс Тома и изоморфизм Тома.** Ориентацию в слое вещественного расслоения ξ можно также задавать выбором образующей $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ в группе когомологий (это удобно, например, при работе с когомологиями де Рама). При этом условие согласованности ориентаций разных слоёв получается очевидной дуализацией формулы (9).

Теорема 4.3. *Пусть ξ — вещественное ориентируемое векторное n-мерное расслоение ξ, заданное проекцией $p \colon E \to B$, с согласлованно выбранными ориентациями слоёв $\theta_x \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$. Тогда*

a) *существует единственный класс когомологий $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, ограничение которого на $H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ есть θ_x для любого $x \in B$;*

б) *умножение на класс θ задаёт изоморфизмы*

$$H^k(B) \cong H^k(E) \xrightarrow{\smile\theta} H^{k+n}(E, E \setminus B), \quad H_{k+n}(E, E \setminus B) \xrightarrow{\frown\theta} H_k(E) \cong H_k(B)$$

для любого k.

Класс $\theta \in H^n(E, E \setminus B)$, задаваемый условием а), называется *классом Тома* расслоения ξ, а изоморфизмы из утверждения б) называются *изоморфизмами Тома.*

В доказательстве теоремы используется следующая алгебраическая конструкция обратного предела, двойственного к прямому пределу.

Конструкция 4.4 (обратный предел групп)**.** Рассмотрим диаграмму $D = \{G_\alpha \colon \alpha \in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta} \colon G_\alpha \to G_\beta$, индексированных частично упорядоченным множеством $(P, \leqslant)$ (см. конструкцию 1.10).

Обратным пределом или просто *пределом* диаграммы D абелевых групп называется подгруппа прямого произведения $\prod_{\alpha\in P} G_\alpha$, состоящая из функций выбора $(\alpha \mapsto g_\alpha \in G_\alpha)$, таких что $f_{\alpha\beta}(g_\alpha) = g_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$. Обозначается $\lim D$ или $\varprojlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $p_\alpha \colon \varprojlim G_\alpha \to G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} p_\alpha = p_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$.

Если в P существует наименьший элемент μ, то $\varprojlim G_\alpha = G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varprojlim G_\alpha = \prod_{\alpha\in P} G_\alpha$.

Предложение 4.5 (универсальное свойство обратного предела)**.** *Пусть $D = \{G_\alpha \colon \alpha \in P\}$ — диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством P. Предположим, что заданы гомоморфизмы $h_\alpha \colon H \to G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $f_{\alpha\beta} h_\alpha = h_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$. Тогда существует единственный гомоморфизм $h \colon H \to \varprojlim G_\alpha$, такой что $p_\alpha h = h_\alpha$:*

$$\begin{tikzcd}
 & & G_\alpha \arrow[dd, "f_{\alpha\beta}"] \\
H \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[urr, bend left, "h_\alpha"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & \varprojlim G_\alpha \arrow[ur, "p_\alpha"] \arrow[dr, "p_\beta"'] & \\
 & & G_\beta
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Гомоморфизм h переводит $a \in H$ в функцию $(\alpha \mapsto h_\alpha(a))$. □

Из определений прямого и обратного предела вытекает, что гомомоморфизм

$$\operatorname{Hom}(\varinjlim G_\alpha, H) \to \varprojlim \operatorname{Hom}(G_\alpha, H),$$

получаемый из универсальных свойств, является изоморфизмом для любой абелевой группы H (задача).

Универсальное свойство выше определяет предел диаграммы $D \colon \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ для произвольной категории $\mathcal{C}$. Конструкция 4.4 показывает, что пределы существуют в категории абелевых групп. Пределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств.

Доказательство теоремы 4.3. Введём обозначение $E_0 = E \setminus B$. Мы докажем когомологический изоморфизм Тома; доказательство для гомологий аналогично. Доказательство разобьём на четыре шага.

Шаг 1. Расслоение ξ тривиально. Пусть $E = B\times\mathbb{R}^n$. Имеем образующие $1 \in H^0(B)$ и $\theta_0 \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Тогда $H^n(E, E_0) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $\theta = 1 \times \theta_0$ есть требуемый класс.

Шаг 2. Предположим, что $B = B'\cup B''$, где B', B'' открыты, и теорема верна для $\xi|_{B'}$, $\xi|_{B''}$ и $\xi|_{B'\cap B''}$; докажем теорему для ξ. Обозначим $B^\cap = B' \cap B''$ и $E^\cap = E' \cap E''$. Рассмотрим следующую диаграмму отображений между последовательностями Майера–Виеториса:

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(E^\cap) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\cdot\theta^\cap"] & H^k(E) \arrow[r] \arrow[d, "?"', "\cdot\theta"] & H^k(E') \oplus H^k(E'') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\cdot\theta'\oplus\cdot\theta''"] & H^k(E^\cap) \arrow[d, "\cong"', "\cdot\theta^\cap"] \\
H^{k-1+n}(E^\cap, E_0^\cap) \arrow[r] & H^{k+n}(E, E_0) \arrow[r] & H^{k+n}(E', E_0') \oplus H^{k+n}(E'', E_0'') \arrow[r] & H^{k+n}(E^\cap, E_0^\cap)
\end{tikzcd}$$

По предположению существуют и единственны классы $\theta^\cap \in H^n(E^\cap, E_0^\cap)$, $\theta' \in H^n(E', E_0')$, $\theta'' \in H^n(E'', E_0'')$. Ограничения классов θ' и θ'' на $H^n(E^\cap, E_0^\cap)$ обладают свойством из утверждения а) теоремы для $\theta^\cap$. Поэтому, в силу единственности, θ' и θ'' при ограничении переходят в $\theta^\cap$. Из точности последовательности Майера–Виеториса следует, что θ' и θ'' являются образами некоторого класса $\theta \in H^n(E, E_0)$. Этот класс определён однозначно, так как $H^{n-1}(E^\cap, E_0^\cap) = 0$ в силу утверждения б) теоремы для расслоения $\xi^\cap$. Тогда умножение на θ задаёт гомоморфизм $H^k(E) \xrightarrow{\cdot\theta} H^{k+n}(E, E_0)$, входящий в коммутативную диаграмму выше (в силу естественности умножения в когомологиях). Этот гомоморфизм является изоморфизмом согласно 5-лемме.

Шаг 3. Существует конечное тривиализующее покрытие $B = U_1 \cup \ldots \cup U_m$ (например, B компактно). Будем вести индукцию по m. База индукции $m = 1$ — это шаг 1. Индукционный переход — применяем шаг 2 к расслоениям $\xi|_{U_1\cup\ldots\cup U_{m-1}}$, $\xi|_{U_m}$ и $\xi|_{(U_1\cup\ldots\cup U_{m-1})\cap U_m} = \xi|_{(U_1\cap U_m)\cup\ldots\cup(U_{m-1}\cap U_m)}$.

Шаг 4. Общий случай. Представим B в виде объедиенинния компактных подмножеств $C \subset B$. Мы имеем $\varinjlim H_k(C) = H_k(B)$, так как образ любого сингулярного симплекса содержится в компактном подмножестве (см. также задачу 1.25). Однако, естественный гомоморфизм $H^k(B) \to \varprojlim H^k(C)$, вообще говоря, не является изоморфизмом. Тем не менее, мы докажем изоморфизм

$$H^n(E, E \setminus B) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C). \tag{10}$$

Для этого вначале заметим, что $H_{n-1}(E, E \setminus B) = 0$. Действительно, для компактной базы B это вытекает из гомологического изоморфизма Тома $H_{n-1}(E, E \setminus B) \cong H_{-1}(B) = 0$, установаленного на шаге 3, а в общем случае имеем

$$H_{n-1}(E, E \setminus B) = \varinjlim H_{n-1}(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C) = 0.$$

Далее, из формул унивесальных коэффициентов получаем

$$\begin{aligned}
H^n(E, E \setminus B) &\cong \mathrm{Hom}\big(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}\big) \oplus \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(E, E \setminus B), \mathbb{Z}\big) = \\
&= \mathrm{Hom}\big(H_n(E, E \setminus B), \mathbb{Z}\big) \cong \mathrm{Hom}\big(\varinjlim H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}\big) \cong \\
&\cong \varprojlim \mathrm{Hom}\big(H_n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C), \mathbb{Z}\big) \cong \varprojlim H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C).
\end{aligned}$$

Тогда требуемый класс $\theta \in H^n(E, E\setminus B)$ соответствует при изоморфизме (10) элементу обратного предела, задаваемому классами $\theta_C \in H^n(p^{-1}(C), p^{-1}(C) \setminus C)$, которые существуют, единственны и обладают свойством из утверждения а) теоремы согласно шагу 3.

Осталось установить изоморфизм Тома (утверждение б) теоремы) в общем случае. Для этого применим относительный вариант теоремы Лере–Хирша (задача 3.23) к паре расслоений $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to (E, E \setminus B) \to B$. Другой способ доказательства изоморфизма заключается в следующем. Вначале рассмотрим когомологии с коэффициентами в поле F. В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
H^k(E;F) \arrow[r, "\smile\theta"] \arrow[d, "\cong"'] & H^{k+n}(E, E\setminus B; F) \arrow[d, "\cong"] \\
\varprojlim H^k(p^{-1}(C);F) \arrow[r, "\smile\theta_C", "\cong"'] & \varprojlim H^{k+n}(p^{-1}(C), p^{-1}(C)\setminus C; F)
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки являются изоморфизмами согласно формуле универсальных коэффициентов (как при доказательстве изоморфизма (10)), а нижняя стрелка является изоморфизмом согласно шагу 3. Следовательно, верхняя стрелка также является изоморфизмом. Далее, можно доказать (задача), что если гомоморфизм $H^k(E;F) \xrightarrow{\smile\theta} H^{k+n}(E, E\setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F, то он также является изоморфизмом с целыми коэффициентами. $\square$

Введём на векторном расслоении ξ евклидову метрику. Пусть $D\xi$ — пространство векторов длины $\leqslant 1$ в слоях расслония ξ, а $S\xi \subset D\xi$ — подпространство векторов длины 1. Тогда $D\xi \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем D^n, а $S\xi \to B$ — расслоение со слоем S^{n-1}.

Факторпространство $Th\,\xi = D\xi/S\xi$ называется *пространством Тома* расслоения ξ. Мы имеем

$$H^*(E, E\setminus B) \cong H^*(D\xi, D\xi\setminus B) \cong H^*(D\xi, S\xi) \cong \widetilde{H}^*(Th\,\xi),$$

а изоморфизм Тома приобретает вид

$$H^k(B) \xrightarrow[\cong]{\cdot\theta} \widetilde{H}^{k+n}(Th\,\xi), \qquad \theta \in H^n(Th\,\xi).$$

Пример 4.6.

1. Если ξ — тривиальное расслоение $\mathbb{R}^k \to pt$ над точкой, то $Th\,\xi = S^k$.
2. Если ξ — нульмерное расслоение $B \to B$, то $Th\,\xi = B_+ = B \sqcup pt$.
3. Имеем $Th(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}^k) \cong \Sigma^k\, Th\,\xi$ (k-кратная надстройка, задача).
4. Из предыдущих примеров получаем $Th(\underline{\mathbb{R}}^k) \cong (\Sigma^k B) \vee S^k$.
5. Если γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$, то $Th\,\gamma \cong \mathbb{R}P^{n+1}$ (задача). Аналогично для $\mathbb{C}P^n$.

4.3. **Определение класса Эйлера, его свойства.** Пусть ξ — ориентированное n-мерное расслоение $p\colon E \to B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E\setminus B)$ при гомоморфизме

$$H^n(E, E\setminus B) \to H^n(E) \xrightarrow{\cong} H^n(B)$$

называется *классом Эйлера* ориентированного векторного расслоения ξ и обозначается $e(\xi) \in H^n(B)$.

Свойства класса Эйлера описываются следующей теоремой.

Теорема 4.7. *Имеем*

а) *$e(f^*\xi) = f^*e(\xi)$, где $f^*\xi$ — расслоение, индуцированное отображением $f\colon B' \to B$;*
б) *если $\widetilde{\xi}$ — расслоение ξ с противоположной ориентацией, то $e(\widetilde{\xi}) = -e(\xi)$;*
в) *если размерность ξ нечётна, то $2e(\xi) = 0$;*
г) *$e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ и $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$;*
д) *если ξ допускает всюду ненулевое сечение, то $e(\xi) = 0$.*

Доказательство. Свойство а) следует из функториальности класса Тома, а б) следует из определения.

Если размерность слоя нечётна, то отображение $E\xi \to E\xi$, $v \mapsto -v$, задаёт обращающий ориентацию изоморфизм расслоения, т. е. изоморфизм ориентированных расслоений $\xi \xrightarrow{\cong} \widetilde{\xi}$. Тогда $e(\widetilde{\xi}) = e(\xi)$ из свойства а) и $e(\widetilde{\xi}) = -e(\xi)$ из свойства б), откуда следует свойство в).

Заметим, что $\theta(\xi \times \xi') = \theta(\xi) \times \theta(\xi') \in H^{n+n'}(E \times E', E \times E' \setminus B \times B')$, откуда получаем $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$. Далее, рассмотрим диагональ $\Delta\colon B \to B \times B$, тогда $\xi \oplus \xi' = \Delta^*(\xi \times \xi')$ и $e(\xi \oplus \xi') = \Delta^*(e(\xi) \times e(\xi')) = e(\xi) \smile e(\xi')$. Свойство г) доказано.

Докажем д). Ненулевое сечение $s\colon B \to E \setminus B$ даёт разложение тождественного отображения $B \to B$ в композицию $B \xrightarrow{s} E \setminus B \to E \xrightarrow{p} B$. Таким образом композиция в верхней строке является тождественным изоморфизмом:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(B) & \xrightarrow{p^*} & H^n(E) & \to & H^n(E \setminus B) & \xrightarrow{s^*} & H^n(B), \\ e(\xi) & \mapsto & \theta(\xi)|_E & \mapsto & 0 & \mapsto & 0. \end{array}$$

Здесь $\theta(\xi)|_E$ обозначает образ класса Тома при гомоморфизме $H^n(E, E \setminus B) \to H^n(E)$, и он переходит в нуль при гомоморфизме $H^n(E) \to H^n(E \setminus B)$, так как композиция $H^n(E, E \setminus B) \to H^n(E) \to H^n(E \setminus B)$ является нулевой (из точной последовательности пары $(E, E \setminus B)$). Отсюда $e(\xi) = 0$.

По-другому свойство д) можно установить, введя метрику на расслоении ξ. Тогда ненулевое сечение даёт разложение $\xi = \xi' \oplus \underline{\mathbb{R}}$, откуда из свойства г) получаем $e(\xi) = e(\xi') \smile e(\underline{\mathbb{R}}) = 0$. □

Можно также определить понятие *R-ориентируемого* векторного расслоения для любого коммутативного кольца R с единицей. Теорема 4.3 имеет место для R-ориентируемого расслоения ξ и даёт класс Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; R)$. Как и для R-ориентируемых многообразий, интерес представляют лишь случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$. Следующее утверждение показывает, что «$\mathbb{Z}_2$-аналогом» класса Эйлера является старший класс Штифеля–Уитни.

Предложение 4.8. *Пусть ξ — n-мерное векторное расслоение $p\colon E \to B$. Образ класса Тома $\theta(\xi) \in H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ при гомоморфизме*

$$H^n(E, E \setminus B; \mathbb{Z}_2) \to H^n(E; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^n(B; \mathbb{Z}_2)$$

есть класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$. Если расслоение ξ ориентировано, то класс $w_n(\xi)$ получается из класса Эйлера $e(\xi)$ приведением по модулю 2.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из сравнения свойств классов Эйлера и Штифеля–Уитни (теоремы 3.4 и 4.7) и единственности классов Штифеля–Уитни (теорема 3.9). Детали остаются в качестве задачи. □

4.4. **Связь с двойственностью Пуанкаре и эйлеровой характеристикой.** Пусть M — гладкое m-мерное подмногообразие в гладком n-мерном многообразии N. Имеет место следующая теорема о трубчатой окрестности, которая доказывается при помощи экспоненциального отображения $\mathcal{T}N \to N$; это доказательство можно найти в книгах [Ле] и [MC].

Теорема 4.9. *Существует окрестность U подмногообразия M в N, диффеоморфная пространству $E\nu$ нормального расслоения $\nu(M \subset N)$, причём диффеоморфизм переводит M в нулевое сечение расслоения M.*

Предложение 4.10. *Пусть подмногообразие M замкнуто в N. Тогда имеет место канонический изоморфизм $H^k(E\nu, E\nu \setminus M) \cong H^k(N, N \setminus M)$. Таким образом если нормальное расслоение $\nu(M \subset N)$ ориентировано, то его класс Тома можно рассматривать как элемент $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$. При этом класс Эйлера $e(\nu)$ является образом класса Тома при композиции*

$$H^{n-m}(N, N \setminus M) \xrightarrow{j^*} H^{n-m}(N) \xrightarrow{i^*} H^{n-m}(M),$$

где гомоморфизм j^* индуцирован отображением пар $j\colon (N, \varnothing) \to (N, N \setminus M)$, а i_* индуцирован вложением $i\colon M \to N$.

Аналогичное утверждение верно для $\mathbb{Z}_2$-класса Тома $\theta(\nu) \in H^{n-m}(N, N \setminus M; \mathbb{Z}_2)$ и класса Штифеля–Уитни $w_{n-m}(\nu) \in H^{n-m}(M; \mathbb{Z}_2)$.

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 4.9. Рассмотрим открытое покрытие $N = U \cup (N \setminus M)$. Тогда из вырезания и теоремы 4.9 получаем

$$H^k(N, N \setminus M) \xrightarrow{\cong} H^k(U, U \setminus M) \cong H^k(E\nu, E\nu \setminus M).$$

Утверждение о классе Эйлера вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H^{n-m}(N, N \setminus M) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\cong"'] & H^{n-m}(N) \arrow[d] \arrow[dr, "i^*"] & \\
H^{n-m}(E\nu, E\nu \setminus M) \arrow[r] & H^{n-m}(E\nu) \arrow[r] & H^{n-m}(M).
\end{tikzcd}$$

Утверждение для класса Штифеля–Уитни доказывается аналогично. □

Следствие 4.11. *Если замкнутое m-мерное многообразие M гладко вложено в $\mathbb{R}^{m+k}$, то $w_k(\nu) = 0$. Если M ориентируемо, то $e(\nu) = 0$.*

Теорема 4.12. *Многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{2^{k+1}-1}$.*

Доказательство. Предположим, такое вложение существует. Тогда из вычисления в теореме 3.20 получаем $w_{2^k-1}(\nu) = t^{2^k-1} \neq 0$. Противоречие. □

Если $i\colon M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N, то изоморфизм

$$i^*\mathcal{T}N \cong \nu(M \subset N) \oplus \mathcal{T}M \tag{11}$$

задаёт ориентацию нормального расслоения ν.

Предложение 4.13. *Пусть $i\colon M \hookrightarrow N$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия в замкнутом ориентированном многообразии N с нормальным расслоением ν и $j\colon (N, \varnothing) \to (N, N \setminus M)$. Тогда класс $j^*\theta(\nu) \in H^{n-m}(N)$ двойствен по Пуанкаре к $i_*[M] \in H_m(N)$.*

Доказательство. Пусть $U \cong E\nu$ — окрестность M из теоремы 4.9. Согласно лемме 1.4 для ориентированного n-мерного многообразия U и компактного подмножества $M \subset U$ существует единственный класс $\mu_M \in H_n(U, U \setminus M)$, который при ограничении переходит в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(U, U \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^{n-m}(N, N \setminus M) \arrow[r, "\ell^*", "\cong"'] \arrow[d, "j^*"'] & H^{n-m}(U, U \setminus M) \arrow[r, "\mu_M \frown"] & H_m(U) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[dr, "\ell_*"'] & H_m(M) \arrow[d, "i_*"] \\
H^{n-m}(N) \arrow[rrr, "{[N]\frown}", "\cong"'] & & & H_m(N).
\end{tikzcd}$$

Здесь ℓ^* индуцирован отображением пар $\ell\colon (U, U \setminus M) \to (N, N \setminus M)$ и является изоморфизмом согласно вырезанию. Изоморфизм $H_m(U) \xrightarrow{\cong} H_m(M)$ индуцирован деформационной ретракцией $U \to M$. В нижней строке стоит изоморфизм двойственности Пуанкаре. Диаграмма коммутативна, так как для $\varphi \in H^{n-m}(N, N \setminus M)$ имеем

$$\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\varphi) = \ell_*(\mu_M) \frown \varphi = j_*[N] \frown \varphi = [N] \frown j^*\varphi,$$

где первое и третье равенство следуют из леммы 1.8, а второе — из определения фундаментального класса. Положив $\varphi = \theta(\nu)$ в равенстве выше, получим, что двойственным по Пуанкаре классом к $j^*\theta(\nu)$ является $\ell_*(\mu_M \frown \ell^*\theta(\nu))$. Требуемое равенство $[N] \frown j^*\theta(\nu) = i_*[M]$ будет доказано, если мы проверим, что класс Тома $\theta(\nu)$ переходит в фундаментальный класс $[M]$ при композиции гомоморфизмов в верхней строке диаграммы. Это достаточно проверить для ограничений $\theta_x \in H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0)$ и $\mu_x^M \in H_m(M, M \setminus x)$ на любую точку $x \in M$, в силу единственности класса Тома и фундаментального класса. При изоморфизмах

$$H^{n-m}(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) \cong H^{n-m}(\mathcal{T}_xN, \mathcal{T}_xN \setminus \mathcal{T}_xM) \cong H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z},$$

задаваемых разложением (11) и ориентациями, элемент θ_x переходит в каноническую образующую $\theta_0 \in H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{Z}$. Аналогично, при изоморфизмах

$$H_n(N, N \setminus x) \cong H_n(\mathcal{T}_xN, \mathcal{T}_xN \setminus 0) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$$

класс локальной ориентации μ_x^N переходит в каноническую образующую $\mu_0^n \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$. Рассмотрим $\frown$-произведение

$$\frown\colon H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \times H^{n-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}).$$

Тогда произведение образующих $\mu_0^n \frown \theta_0$ есть образующая группы $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-m}) \cong H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus 0)$, т. е. μ_0^m, которая соответствует ограничению на x фундаментального класса $[M] \in H_m(M)$. □

Рассмотрим теперь диагональное вложение $\Delta\colon M \to M \times M$, $\Delta(x) = (x, x)$.

Лемма 4.14. *Нормальное расслоение $\nu(\Delta\colon M \to M \times M)$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$.*

Доказательство. Вектор $(u, v) \in \mathcal{T}_xM \times \mathcal{T}_xM = \mathcal{T}_{(x,x)}(M \times M)$ касателен к подмногообразию $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = v$ и нормален к $\Delta(M)$ тогда и только тогда, когда $u = -v$. Отображение $\mathcal{T}M \to \nu(\Delta)$, $v \mapsto (-v, v)$, даёт требуемый изоморфизм расслоений. □

Предположим, что многообразие M ориентировано (или когомологии рассматриваются с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$). Обозначим через

$$\theta_\Delta \in H^m(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$$

класс Тома нормального расслоения $\nu(\Delta)$. Для $x \in M$ обозначим через $\psi_x \in H^m(M, M \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ класс когомологий, двойственный к локальной ориентации $\mu_x \in H_m(M, M \setminus x)$, т. е. $\langle \psi_x, \mu_x \rangle = 1$. Рассмотрим отображение

$$j_x\colon (M, M \setminus x) \to (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)), \quad y \mapsto (x, y). \tag{12}$$

Лемма 4.15. *Имеем $j_x^*\theta_\Delta = \psi_x$ для любой точки $x \in M$.*

Доказательство. Пусть U — окрестность точки $x \in M$ из теоремы 4.9, тогда мы имеем вложение $\mathcal{T}_x M \cong U \to M$. Рассмотим линейные отображения

$$f_0, f_1\colon (\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) \to (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)),$$
$$f_0(v) = (0, v), \quad f_1(v) = (-v, v).$$

Отображения f_0 и f_1 гомотопны посредством гомотопии $f_t(v) = (-tv, v)$. Имеем две коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)) \arrow[d] \\
(M, M \setminus x) \arrow[r, "j_x"] & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \setminus 0) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M)) \arrow[d] \\
(E\nu_x, E\nu_x \setminus 0) \arrow[r, "i"] & (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))
\end{tikzcd}$$

Во второй диаграмме нижнее отображение — вложение слоя нормального расслоения $\nu(\Delta\colon M \to M \times M)$, а левое — изоморфизм из леммы 4.14. Из второй диаграммы, определения класса θ_Δ и леммы 4.14 получаем $i^*\theta_\Delta = \psi_x$. Так как $f_0 \simeq f_1$, имеем $j_x^*\theta_\Delta = f_0^*\theta_\Delta = f_1^*\theta_\Delta = i^*\theta_\Delta = \psi_x$, где мы отождествляем θ_Δ с его образом в $H^m(\mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M, \mathcal{T}_x M \times \mathcal{T}_x M \setminus \mathcal{T}_x \Delta(M))$. $\square$

Рассмотрим $\times$-умножение $\times\colon H^p(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}(M \times M)$.

Лемма 4.16. *Для любого $\varphi \in H^k(M)$ имеем $(\varphi \times 1) \smile \theta_\Delta = (1 \times \varphi) \smile \theta_\Delta$.*

Доказательство. Пусть U — трубчатая окрестность $\Delta(M)$ в $M \times M$ из теоремы 4.9 и $p_1, p_2\colon M \times M \to M$ — проекции. Поскольку p_1 и p_2 совпадают на $\Delta(M)$, ограничение $p_1|_U$ гомотопно ограничению $p_2|_U$. Следовательно, два класса $\varphi \times 1 = p_1^*(\varphi)$ и $1 \times \varphi = p_2^*(\varphi)$ имеют один и тот же образ при гомоморфизме ограничения $H^k(M \times M) \to H^k(U)$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H^k(M \times M) \arrow[r] \arrow[d, "\smile\theta_\Delta"] & H^k(U) \arrow[d, "\smile\theta_\Delta"] \\
H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \arrow[r, "\cong"] & H^{k+m}(U, U \setminus \Delta(M))
\end{tikzcd}$$

вытекает, что $(\varphi \times 1) \smile \theta_\Delta = (1 \times \varphi) \smile \theta_\Delta$ в $H^{k+m}(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$. $\square$

Определим теперь *косое гомологическое произведение* или */-произведение.* Для клеточных (ко)цепей клеточных пространств X и Y определим билинейное /-произведение

$$/ \colon \mathcal{C}^n(X \times Y) \times \mathcal{C}_q(Y) \to \mathcal{C}^{n-q}(X)$$

по формуле

$$(f \times g, e^q) \mapsto f\langle g, e^q\rangle$$

где $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, а e^q — клетка в Y (здесь как обычно полагаем $\langle g, e^q\rangle = 0$, если $n - p \neq q$). Эта формула однозначно определяет отображение, так как любая клеточная коцепь из $\mathcal{C}^n(X \times Y)$ является линейной комбинацией коцепей вида $f \times g$. (Сравните с клеточным определением $\times$-произведения.)

Предложение 4.17. *Для $h \in \mathcal{C}^n(X \times Y)$ и $a \in \mathcal{C}_q(Y)$ выполнено равенство*

$$d(h/a) = dh/a + (-1)^{n-q} h/\partial a.$$

Доказательство. Можно считать $h = f \times g$, $f \in \mathcal{C}^p(X)$, $g \in \mathcal{C}^{n-p}(Y)$, $a = e^q$. Тогда

$$\begin{aligned}
&d(h/a) = d(f \times g/e^q) = d(f\langle g, e^q\rangle) = df\langle g, e^q\rangle,\\
&dh/a = d(f \times g)/e^q = (df \times g + (-1)^p f \times dg)/e^q = df\langle g, e^q\rangle + (-1)^p f\langle dg, e^q\rangle,\\
&h/\partial a = (f \times g)/\partial e^q = f\langle g, \partial e^q\rangle = f\langle dg, e^q\rangle.
\end{aligned}$$

При этом $\langle dg, e^q\rangle \neq 0$ только при $n-p+1 = q$, т. е. $n-q = p-1$. Умножая последнее равенство на $(-1)^{n-q}$ и складывая, получим требуемое. □

Из предложения 4.17 следует, что /-произведение коцикла на цикл есть коцикл, произведение коцикла на границу есть кограница и т. д., так что определено билинейное гомологическое /-произведение

$$/ \colon H^n(X \times Y) \times H_q(Y) \to H^{n-q}(X), \quad (\eta, \alpha) \mapsto \eta/\alpha.$$

Предложение 4.18. *Имеем*

а) $(\varphi \times \psi)/\alpha = \varphi\langle\psi, \alpha\rangle$ *для* $\varphi \in H^p(X)$, $\psi \in H^{n-p}(Y)$ *и* $\alpha \in H_q(Y)$;
б) $\langle\eta/\alpha, \beta\rangle = \langle\eta, \beta \times \alpha\rangle$ *для* $\eta \in H^n(X \times Y)$, $\alpha \in H_q(Y)$ *и* $\beta \in H_{n-q}(X)$;
в) $((\varphi \times 1) \smile \eta)/\alpha = \varphi \smile (\eta/\alpha)$ *для* $\varphi \in H^p(X)$, $\eta \in H^n(X \times Y)$ *и* $\alpha \in H_q(Y)$.

Доказательство. Равенства а) и б) выполнены на уровне коцепей и вытекают из определения цепного /-произведения. Для доказательства в) можно считать, что $\eta = \chi \times \psi$, $\chi \in H^{n-q}(X)$, $\psi \in H^q(Y)$. Тогда имеем

$$((\varphi \times 1) \smile (\chi \times \psi))/\alpha = ((\varphi \smile \chi) \times \psi)/\alpha = (\varphi \smile \chi)\langle\psi, \alpha\rangle = \varphi \smile (\eta/\alpha). \qquad \square$$

При ограничении на $(M \times M, \varnothing) \subset (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$ класс Тома θ_Δ переходит в класс $\nabla_M \in H^m(M \times M)$, который называется *диагональным когомологическим классом.* Если многообразие M замкнуто, то класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M] \in H_m(M \times M)$ согласно предложению 4.13.

Лемма 4.19. *Если многообразие M замкнуто и ориентировано, то $\nabla_M/[M] = 1 \in H^0(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $i_x\colon x \to M$. Достаточно доказать, что $i_x^*(\nabla_M/[M]) = 1 \in H^0(x)$ для любой точки $x \in M$. Рассмотрим отображение j_x (12) и коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^m(M\times M) \arrow[r, "/[M]"] \arrow[d, "(i_x\times\mathrm{id})^*"'] & H^0(M) \arrow[d, "i_x^*"] \\ H^m(x\times M) \arrow[r, "/[M]"] & H^0(x) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "r_x"] \arrow[d, "j_x"'] & (M, M\setminus x) \arrow[d, "j_x"] \\ M\times M \arrow[r, hook, "r_\Delta"] & (M\times M, M\times M\setminus\Delta(M)) \end{tikzcd}$$

Из первой диаграммы получаем

$$i_x^*(\nabla_M/[M]) = ((i_x\times\mathrm{id})^*\nabla_M)/[M] = (1\times j_x^*\nabla_M)/[M] = 1\cdot\langle j_x^*\nabla_M, [M]\rangle$$

в $H^0(x)$, где в последнем равенстве мы воспользовались предложением 4.18 а). Из определения ∇_M и второй диаграммы получаем

$$\langle j_x^*\nabla_M, [M]\rangle = \langle j_x^* r_\Delta^*(\theta_\Delta), [M]\rangle = \langle r_x^* j_x^*(\theta_\Delta), [M]\rangle = \langle r_x^*\psi_x, [M]\rangle = \langle \psi_x, \mu_x\rangle = 1,$$

где в третьем равенстве мы воспользовались леммой 4.15. □

Теорема 4.20. *Пусть M — замкнутое многообразие и F-поле. Предположим, что M ориентируемо или поле F имеет характеристику 2. Пусть $\psi_1,\ldots,\psi_r$ — базис в $H^*(M;F)$ и $\widetilde\psi_1,\ldots,\widetilde\psi_r$ — двойственный по Пуанкаре базис в $H^*(M;F)$, т. е. $\langle\psi_i\smile\widetilde\psi_j, [M]\rangle = \delta_{ij}$. Тогда*

$$\nabla_M = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim\psi_i}\psi_i\times\widetilde\psi_i, \qquad e(\mathcal{T}M) = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim\psi_i}\psi_i\smile\widetilde\psi_i.$$

Доказательство. Для коэффициентов в поле имеем $H^*(M\times M;F) = H^*(M;F)\otimes H^*(M;F)$. Поэтому мы можем записать $\nabla_M = \sum_{i=1}^r \psi_i\times\zeta_i$ для некоторых классов $\zeta_i\in H^*(M;F)$, $\dim\psi_i + \dim\zeta_i = m$.

Ограничивая соотношение из леммы 4.16 на $M\times M$, получаем $(\varphi\times 1)\smile\nabla_M = (1\times\varphi)\smile\nabla_M$ для любого $\varphi\in H^*(M;F)$. Применим $/[M]$ к обеим частям этого соотношения. Слева получим

$$((\varphi\times 1)\smile\nabla_M)/[M] = \varphi\smile(\nabla_M/[M]) = \varphi$$

в силу предложения 4.18 в) и леммы 4.19, а справа

$$\Bigl((1\times\varphi)\smile\sum_j\psi_j\times\zeta_j\Bigr)/[M] = \sum_j(-1)^{\dim\varphi\dim\psi_j}(\psi_j\times(\varphi\smile\zeta_j))/[M] =$$
$$= \sum_j(-1)^{\dim\varphi\dim\psi_j}\psi_j\langle\varphi\smile\zeta_j, [M]\rangle$$

в силу предложения 4.18 а). Полагая $\varphi = \psi_i$, получим

$$(-1)^{\dim\psi_i\dim\psi_j}\langle\psi_i\smile\zeta_j, [M]\rangle = \delta_{ij}.$$

Отсюда $\zeta_j = (-1)^{\dim\psi_j}\widetilde\psi_j$ и $\nabla_M = \sum_j(-1)^{\dim\psi_j}\psi_j\times\widetilde\psi_j$.

Формула для $e(\mathcal{T}M)$ следует из определения: $e(\mathcal{T}M) = \Delta^*(\nabla_M)$. □

Из формул универсальных коэффициентов вытекает, что эйлерову характеристику многообразия M (или любого конечного клеточного пространства) можно вычислять через когомологии с коэффициентами в произвольном поле F, и результат не зависит от F:

$$\chi(M)=\sum_k(-1)^k\dim H^k(M;F).$$

Теорема 4.21. *Для гладкого замкнутого ориентированного многообразия M*

$$\langle e(\mathcal{T}M),[M]\rangle=\chi(M).$$

Если M неориентировано, то $w_m(\mathcal{T}M),[M]\rangle=\chi(M) \mod 2$.

Доказательство. Вычисляя $e(\mathcal{T}M)=\sum_i(-1)^{\dim\psi_i}\psi_i\smile\widetilde{\psi}_i$ на фундаментальном классе, получаем $\langle e(\mathcal{T}M),[M]\rangle=\sum_i(-1)^{\dim\psi_i}=\chi(M)$. □

Следствие 4.22. *Имеем $\chi(M)=\langle\nabla_M\smile\nabla_M,[M\times M]\rangle$.*

Доказательство. Так как ∇_M двойствен по Пуанкаре к $\Delta_*[M]$, имеем

$$\begin{aligned}\chi(M)&=\langle e(\mathcal{T}M),[M]\rangle=\langle\Delta^*\nabla_M,[M]\rangle=\langle\nabla_M,\Delta_*[M]\rangle=\Delta_*[M]\frown\nabla_M=\\&=([M\times M]\frown\nabla_M)\frown\nabla_M=[M\times M]\frown(\nabla_M\smile\nabla_M)=\langle\nabla_M\smile\nabla_M,[M\times M]\rangle.\end{aligned}$$ □

Гладкие подмногообразия M_1 и M_2 в N *пересекаются трансверсально*, если в каждой точке $x\in M_1\cap M_2$ выполнено $\mathcal{T}_xM_1+\mathcal{T}_xM_2=\mathcal{T}_xN$. Если M_1 и M_2 имеют дополнительные размерности (т. е. $m_1+m_2=n$), то точки трансверсального пересечения образуют дискретное подмножество (конечное, если N компактно). Если M_1,M_2 и N ориентированы, то каждой точке пересечения $x\in M_1\cap M_2$ присваивается *знак*, равный $+1$, если ориентации пространств левой и правой части равенства $\mathcal{T}_xM_1\oplus\mathcal{T}_xM_2=\mathcal{T}_xN$ совпадают, и -1 в противном случае. Сумма знаков точек пересечения называется *индексом пересечения* ориентированных подмногооразий M_1 и M_2 дополнительных размерностей в ориентированном многобразии N.

В дифференциальной топологии доказывается, что индекс пересечения равен $\langle D[M_1]\smile D[M_2],[N]\rangle$, где $D[M_i]\in H^{n-m_i}(N)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к фундаментальному классу $[M_i]\in H_{m_i}(N)$. Это также позволяет определить индекс пересечения для подмногообразий M_1 и M_2, пересекающихся не трансверсально (в частности, *индекс самопересечения* многообразия половинной размерности в N). Для этого необходимо «пошевелить» одно из многообразий, например M_1, т. е. заменить вложение M_1 в N на гомотопное вложение так, что новое подмногообразие $\widetilde{M}_1$ пересекает M_2 трансверсально. Индекс пересечения M_1 и M_2 тогда можно определить как индекс пересечения $\widetilde{M}_1$ и M_2. При этом мы имеем $\langle D[M_1]\smile D[M_2],[N]\rangle=\langle D[\widetilde{M}_1]\smile D[M_2],[N]\rangle$, так как $[M_1]=[\widetilde{M}_1]$.

Так как класс ∇_M двойствен по Пуанкаре к диагональному подмногообразию $\Delta(M)$ в $M\times M$, выражение $\langle\nabla_M\smile\nabla_M,[M\times M]\rangle$ в правой части соотношения из следствия 4.22 есть индекс самопересечения $\Delta(M)$.

Следствие 4.23. *Эйлерова характеристика замкнутого многообразия M равна индексу самопересечения диагонального подмногообразия $\Delta(M)$ в $M\times M$.*

Так как нормальное расслоение к $\Delta(M)$ в $M\times M$ канонически изоморфно касательному расслоению $\mathcal{T}M$, вместо того, чтобы «шевелить» $\Delta(M)$ в $M\times M$, мы можем шевелить нулевое сечение в пространстве $\mathcal{T}M$. Сечения касательного расслоения $\mathcal{T}M$ — это векторные поля на M, а нули сечения — особые точки векторного поля. Подмногообразие $\widetilde{M} \subset \mathcal{T}M$, задаваемое векторным полем (сечением), трансверсально к нулевому сечению $M \subset \mathcal{T}M$ тогда и только тогда, когда векторное поле имеет изолированные особенности.

Следствие 4.24. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особенностями на гладком замкнутом ориентированном многообразии M равна эйлеровой характеристике $\chi(M)$.*

Задачи и упражнения.

4.25. Докажите, что для любой абелевой группы H имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim G_\alpha, H) \xrightarrow{\cong} \varprojlim \mathrm{Hom}(G_\alpha, H).$$

4.26. Докажите, что если гомоморфизм $H^k(E;F) \xrightarrow{\smile\theta} H^{k+n}(E, E\setminus B; F)$ является изоморфизмом для любого поля F, то он является изоморфизмом с целыми коэффициентами (а также с коэффициентами в любом коммутативном кольце с единицей).

4.27. Докажите, что для пространства Тома $Th\,\xi = D\xi/S\xi$ вещественного векторного расслоения ξ имеем $Th(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}^k) \cong \Sigma^k\, Th\,\xi$, где $\underline{\mathbb{R}}^k$ — тривиальное расслоение над той же базой, а Σ^k — k-кратная надстройка.

4.28. Докажите, что пространство Тома $Th\,\xi$ вещественного (комплексного) векторного расслоения ξ над клеточным пространством гомеоморфно $\mathbb{R}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}})/\mathbb{R}P(\xi)$ (соответственно, $\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}})/\mathbb{C}P(\xi)$).

4.29. Докажите, что пространство Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$) гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).

4.30. Докажите, что вещественное векторное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$.

4.31. Докажите, что при гомоморфизме $H^n(B;\mathbb{Z}) \to H^n(B;\mathbb{Z}_2)$ класс Эйлера $e(\xi)$ ориентированного n-мерного расслоения ξ переходит в класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$.

4.32. Пусть η^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Докажите, что расслоение $\eta^n \oplus \eta^n$ ориентируемо и $e(\eta^n \oplus \eta^n) \neq 0$.

4.33. Пусть ξ — комплексное n-мерное векторное расслоение и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Докажите, что $e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n(\xi)$.

4.34. При каких n на сфере S^n существует нигде не обращающееся в нуль векторное поле? Тот же вопрос для $\mathbb{C}P^n$.

5. Классы Понтрягина

5.1. **Общее понятие характеристического класса.** Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое семейство векторных расслоений фиксированной размерности n, замкнутое относительно перехода к индуцированному расслоению, и пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Назовём k-мерным *характеристическим классом* расслоений из $\mathcal{V}$ с коэффициентами в R соответствие

$$\{\text{векторные расслоения из } \mathcal{V}\} \to \{\text{классы из } H^k(B;R)\}, \quad \xi = (p\colon E \to B) \mapsto c(\xi),$$

удовлетворяющее соотношению $f^*c(\xi) = c(f^*\xi)$ для $f\colon B' \to B$.

Примеры — классы Штифеля–Уитни для $\mathcal{V} = \{$вещественные расслоения$\}$ и $R = \mathbb{Z}_2$, классы Чженя для $\mathcal{V} = \{$комплексные расслоения$\}$ и $R = \mathbb{Z}$, а также класс Эйлера для $\mathcal{V} = \{$ориентированные расслоения$\}$ и $R = \mathbb{Z}$.

Характеристические классы всевозможных размерностей с коэффициентами в R образуют кольцо относительно когомологического умножения.

Предложение 5.1. *Кольцо характеристических классов вещественных (комплексных) n-мерных расслоений с коэффициентами в R изоморфно $H^*(BO(n); R)$ (соответственно, $H^*(BU(n); R)$).*

Доказательство. Это следует из определения характеристических классов, классифицирующих пространств $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$, $BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty)$ и теоремы 2.15. $\square$

Из теорем 3.12 и 3.14 мы знаем как устроены кольца когомологий $BO(n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и $BU(n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ (а значит, и с коэффициентами в любом R): $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]$, $H^*(BU(n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$, где w_i — универсальные классы Штифеля–Уитни, а c_i — универсальные классы Чженя.

Следствие 5.2. *Любой характеристический класс вещественных (комплексных) n-мерных расслоений с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ (в $\mathbb{Z}$) есть многочлен от классов Штифеля–Уитни (Чженя), причём разным многочленам соответствуют разные характеристические классы.*

Аналогичное описание характеристических классов вещественных или ориентированных расслоений с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ отсутствует, так как кольца $H^*(BO(n); \mathbb{Z})$ и $H^*(BSO(n); \mathbb{Z})$ устроены сложно. Некоторое разумное приближение дают классы Понтрягина, как мы увидим далее. Классы Понтрягина также естественно возникают при рассмотрении кватернионных векторных расслоений.

5.2. **Связь классов Штифеля–Уитни комплексного расслоения с его классами Чженя.**

Теорема 5.3. *Пусть ξ — комплексное n-мерное расслоение над B и $\xi_\mathbb{R}$ — его овеществление. Тогда $w_{2k}(\xi_\mathbb{R}) = c_k(\xi) \mod 2$ и $w_{2k+1}(\xi_\mathbb{R}) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{C}P(\xi) \to B$, тавтологическое одномерное комплексное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{C}P(\xi))$ над $\mathbb{C}P(\xi)$, его овеществление $\gamma_\mathbb{R}$ (двумерное вещественное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$) и проективизацию $\mathbb{R}P(\gamma_\mathbb{R})$. Мы имеем $\mathbb{R}P(\xi_\mathbb{R}) = \mathbb{R}P(\gamma_\mathbb{R})$, так как любая вещественная прямая в слое $\xi_\mathbb{R}$ однозначно задаёт содержащую её комплексную прямую в слое ξ. Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{R}P(\xi_\mathbb{R}) = \mathbb{R}P(\gamma_\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P(\xi) \to B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{R}P^1$.

Согласно теоремам 3.2 и 3.3 о когомологиях проективизации имеем

$$\begin{array}{rcl}
H^*(\mathbb{C}P(\xi)) & \cong & H^*(B)[v] \,/\, (v^n + c_1(\xi)v^{n-1} + \ldots + c_n(\xi) = 0), \\
H^*(\mathbb{R}P(\xi_\mathbb{R})) & \cong & H^*(B)[u] \,/\, (u^{2n} + w_1(\xi_\mathbb{R})u^{2n-1} + \ldots + w_{2n}(\xi_\mathbb{R}) = 0), \\
\shortparallel & & \\
H^*(\mathbb{R}P(\gamma_\mathbb{R})) & \cong & H^*(\mathbb{C}P(\xi))[t] \,/\, (t^2 + \pi^*w_1(\gamma_\mathbb{R})t + \pi^*w_2(\gamma_\mathbb{R}) = 0).
\end{array} \tag{13}$$

Здесь все когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, $v = e(\gamma_\mathbb{R}) = w_2(\gamma_\mathbb{R}) = c_1(\gamma) \mod 2$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{R}P(\xi_\mathbb{R})) = \gamma(\mathbb{R}P(\gamma_\mathbb{R}))$ — тавтологическое одномерное вещественное расслоение над $\mathbb{R}P(\xi_\mathbb{R}) = \mathbb{R}P(\gamma_\mathbb{R})$. Тогда $u = t = w_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_\mathbb{R} \cong \gamma' \oplus \gamma'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \gamma')$ в $x + iy$. Поэтому $\pi^* w_1(\gamma_\mathbb{R}) = 0$ и $\pi^* w_2(\gamma_\mathbb{R}) = w_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^* v = t^2 = u^2$. Подставляя это в (13), получаем

$$
\begin{aligned}
H^*(\mathbb{R}P(\xi_\mathbb{R})) = H^*(\mathbb{R}P(\gamma_\mathbb{R})) \cong H^*(\mathbb{C}P(\xi))[u] \,/\, (u^2 = \pi^* v) \cong \\
\cong H^*(B)[u, \pi^* v] \,/\, \big((\pi^* v)^n + c_1(\xi)(\pi^* v)^{n-1} + \ldots + c_n(\xi) = 0,\ u^2 = \pi^* v\big) = \\
= H^*(B)[u] \,/\, (u^{2n} + c_1(\xi) u^{2n-2} + \ldots + c_n(\xi) = 0).
\end{aligned}
$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (13), получим требуемое. □

Рассмотрим отображение $r\colon BU(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty) \to G_{2n}(\mathbb{R}^\infty) = BO(2n)$, задаваемое овеществлением (забыванием комплексной структуры) n-мерных комплексных плоскостей. По определению, это отображение классифицирует овеществление тавтологического комплексного расслоения γ^n над $BU(n)$.

Предложение 5.4. *Гомоморфизм*

$$H^*(BO(2n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \ldots, w_{2n}] \to \mathbb{Z}_2[c_1, c_2, \ldots, c_n] = H^*(BU(n); \mathbb{Z}_2),$$

индуцированный забыванием комплексной структуры $r\colon BU(n) \to BO(2n)$*, переводит* w_{2k} *в* c_k *и* w_{2k+1} *в* 0.

Доказательство. Пусть γ — тавтологическое комплексное расслоение над $BU(n)$, а γ' — тавтологическое вещественное расслоение над $BO(2n)$. Тогда $r^*\gamma' = \gamma_\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
r^* w_{2k} &= r^*(w_{2k}(\gamma')) = w_{2k}(r^*\gamma') = w_{2k}(\gamma_\mathbb{R}) = c_k(\gamma) = c_k \mod 2, \\
r^* w_{2k+1} &= r^*(w_{2k+1}(\gamma')) = w_{2k+1}(r^*\gamma') = w_{2k+1}(\gamma_\mathbb{R}) = 0.
\end{aligned}
$$

□

5.3. **Кватернионные классы Понтрягина.** *Кватернионы* определяются как элементы четырёхмерного векторного пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k\rangle$ с базисом $1, i, j, k$, т. е. как линейные комбинации $a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d — вещественные числа. Правило умножения символов i, j, k

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

распространённое по билинейности, превращает $\mathbb{H}$ в ассоциативную (но не коммутативную алгебру) алгебру с делением над $\mathbb{R}$.

Кватернионным векторным пространством называется вещественное векторное пространство V со структурой левого $\mathbb{H}$-модуля, продолжающей структуру $\mathbb{R}$-модуля (т. е. умножение на вещественные скаляры осуществляется как в исходном V). Вещественная размерность кватернионного векторного пространства кратна 4.

Если W — кватернионное векторное пространство, то его *комплексификацией* $W_\mathbb{C}$ называется комплексное векторное пространство, получаемое забыванием умножений на j, k (остаётся только умножение на комплексные скаляры). Если W имело размерность n над $\mathbb{H}$, то $W_\mathbb{C}$ имеет размерность $2n$ над $\mathbb{C}$.

Если V — комплексное векторное пространство, то его *кватернионизацией* называется кватернионное пространство $V_\mathbb{H} = V \otimes \mathbb{H}$. В более явном виде, $V_\mathbb{H}$ представляет собой пространство $V \oplus \overline{V}$, в котором умножение на кватернионную единицу

j определено формулой $j(x,y) = (-y,x)$. Так как $i(x,y) = (ix,-iy)$ в $V \oplus \overline{V}$, имеем $k(x,y) = ij(x,y) = (-iy,-ix)$. Непосредственная проверка показывает, что эти формулы действительно определяют структуру левого $\mathbb{H}$-модуля на $V \oplus \overline{V}$.

Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как множество одномерных кватернионных подпространств (прямых) в $\mathbb{H}^{n+1}$, аналогично вещественному и комплексному случаям (умножение на кватернионные скаляры всегда осуществляется слева).

Кватернионным n-мерным векторным расслоением называется вещественное $4n$-мерное расслоение, слои которого являются кватернионными векторными пространствами, а тривиализации — $\mathbb{H}$-линейными отображениями. Описанные выше операции над векторными пространствами определены и для векторных расслоений. Так, определены комплексификация $\eta_{\mathbb{C}}$ кватернионного векторного расслоения η, кватернионизация $\xi_{\mathbb{H}}$ комплексного расслоения ξ и кватернионная проективизация $\mathbb{H}P(\eta)$.

Следующая теорема выводится из теоремы Лере–Хирша аналогично теореме 3.3.

Теорема 5.5. *Пусть η — кватернионное n-мерное векторное расслоение над клеточным пространством B. Тогда кольцо $H^*(\mathbb{H}P(\eta);\mathbb{Z})$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов с коэффициентами в $H^*(B)$ от одной образующей $v_\eta \in H^4(\mathbb{H}P(\eta))$ по единственному соотношению*

$$v_\eta^n + p_1(\eta)\cdot v_\eta^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(\eta)\cdot v_\eta + p_n(\eta)\cdot 1 = 0,$$

где классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$, $i = 1,\ldots,n$, определяются расслоением η.

Классы $p_i(\eta) \in H^{4i}(B)$ называются *кватернионными классами Понтрягина* n-мерного кватернионного векторного расслоения η.

Следующая теорема, аналогичная теореме 5.3, показывает, что кватернионные классы Понтрягина сводятся к классам Чженя.

Теорема 5.6. *Пусть η — кватернионное n-мерное расслоение над B и $\eta_{\mathbb{C}}$ — его комплексификация. Тогда $p_k(\eta) = (-1)^k c_{2k}(\eta_{\mathbb{C}})$ и $c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{H}P(\eta) \to B$, тавтологическое одномерное кватернионное расслоение $\gamma = \gamma(\mathbb{H}P(\eta))$ над $\mathbb{H}P(\eta)$, его комплексификацию $\gamma_{\mathbb{C}}$ (двумерное комплексное расслоение над $\mathbb{H}P(\eta)$) и проективизацию $\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Мы имеем $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$, так как любая комплексная прямая в слое $\eta_{\mathbb{C}}$ однозначно задаёт содержащую её кватернионную прямую в слое η. Получаем последовательность расслоений

$$\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}P(\eta) \to B,$$

где π — расслоение со слоем $\mathbb{C}P^1$.

Согласно теоремам 3.3 и 5.5 о когомологиях проективизации имеем

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathbb{H}P(\eta)) & \cong & H^*(B)[v]\,/\,(v^n + p_1(\eta)v^{n-1} + \ldots + p_n(\eta) = 0), \\ H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) & \cong & H^*(B)[u]\,/\,(u^{2n} + c_1(\eta_{\mathbb{C}})u^{2n-1} + \ldots + c_{2n}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0), \\ \| & & \\ H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) & \cong & H^*(\mathbb{H}P(\eta))[t]\,/\,(t^2 + \pi^*c_1(\gamma_{\mathbb{C}})t + \pi^*c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0). \end{array} \tag{14}$$

Мы имеем $v = c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = p_1(\gamma)$. Обозначим $\gamma' = \gamma(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) = \gamma(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}}))$ — тавтологическое одномерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})$. Тогда $u = t = c_1(\gamma')$.

Мы имеем $\pi^*\gamma_{\mathbb{C}} \cong \gamma' \oplus \overline{\gamma}'$; изоморфизм переводит $(x, y) \in E(\gamma' \oplus \overline{\gamma}')$ в $x + jy$. Поэтому $\pi^* c_1(\gamma_{\mathbb{C}}) = 0$ и $\pi^* c_2(\gamma_{\mathbb{C}}) = -c_1(\gamma')^2$, т. е. $\pi^* v = -t^2 = -u^2$. Подставим это в (14):

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P(\eta_{\mathbb{C}})) = H^*(\mathbb{C}P(\gamma_{\mathbb{C}})) \cong H^*(\mathbb{H}P(\eta))[u] \,/\, (u^2 = -\pi^* v) \cong \\ \cong H^*(B)[u, \pi^* v] \,/\, \big((\pi^* v)^n + p_1(\eta)(\pi^* v)^{n-1} + \ldots + p_n(\eta) = 0,\ u^2 = -\pi^* v\big) = \\ = H^*(B)[u] \,/\, (u^{2n} - p_1(\eta) u^{2n-2} + \ldots + (-1)^n p_n(\eta) = 0). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^k со второй формулой (14), получим требуемое. □

Кватернионное векторное расслоение — это весьма богатая геометрическая структура, и естественно возникающих кватернионных расслоений мало.

Одна из трудностей, возникающих при работе с кватернионными расслоениями, заключается в том, что множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ кватернионно-линейных отображений кватернионных пространств U и W не является кватернионным пространством (левым $\mathbb{H}$-модулем), в силу некоммутативности умножения кватернионов. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(U, W)$ не имеет даже естественной комплексной структуры и является лишь вещественным векторным пространством.

Пример 5.7. Рассмотрим касательное расслоение $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ к кватернионному проективному пространству. По аналогии с предложением 2.6 доказывается, что имеет место изоморфизм *вещественных* расслоений $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^\perp)$, где γ — тавтологическое одномерное кватернионное расслоение над $\mathbb{H}P^n$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\mathbb{H}P^n \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^\perp) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma) = \\ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \underline{\mathbb{H}}^{n+1}) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \underline{\mathbb{H}}). \end{aligned}$$

Расслоение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \underline{\mathbb{H}})$ изоморфно, как вещественное расслоение, расслоению $\gamma_{\mathbb{R}}$. Расслоение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\gamma, \gamma)$ является четырёхмерным вещественным расслоением, которое оказывается нетривиальным (в отличие от комплексного случая).

Можно доказать, что кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным многообразием даже в слабом смысле, т. е. касательное расслоение $\mathcal{T}\mathbb{H}P^n$ не является кватернионным расслоением, и даже не допускает комплексной структруры.

5.4. **Классы Понтрягина вещественных расслоений.** Пусть ξ — вещественное векторное расслоение над клеточной базой B. Его k-м *характеристическим классом Понтрягина* называется

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(B).$$

Также вводится полный класс Понтрягина $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + \ldots$

Связь с кватернионными классами Понтрягина описывается через комплексные расслоения:

Предложение 5.8. *Для комплексного расслоения ζ имеем $p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}})$, где слева стоит класс Понтрягина вещественного расслоения, а справа — кватернионного.*

Доказательство. Имеем

$$p_k(\zeta_{\mathbb{R}}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}) = (-1)^k c_{2k}(\zeta \oplus \overline{\zeta}) = (-1)^k c_{2k}((\zeta_{\mathbb{H}})_{\mathbb{C}}) = p_k(\zeta_{\mathbb{H}}),$$

где последнее равенство вытекает из теоремы 5.6. □

Предложение 5.9. *Пусть ξ — вещественное векторное расслоение.*

а) $\xi_{\mathbb C} \cong \overline{\xi}_{\mathbb C}$ *(изоморфизм комплексных расслоений);*

б) $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb C}) = 0$. *Если $\xi_{\mathbb C} = \eta_{\mathbb C}$ для кватернионного η, то $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb C}) = 0$.*

Доказательство. Комплексификация $\xi_{\mathbb C}$ представляет собой расслоение $\xi \oplus \xi$ с оператором комплексной структуры $i(x, y) = (-y, x)$, а комплексная структура на $\overline{\xi}_{\mathbb C}$ задаётся как $i(x, y) = (y, -x)$. Тогда отображение $(x, y) \mapsto (x, -y)$ задаёт $\mathbb C$-линейный изоморфизм $\xi_{\mathbb C} \to \overline{\xi}_{\mathbb C}$, что доказывает а).

Так как $c_{2k+1}(\overline{\zeta}) = -c_{2k+1}(\zeta)$ для любого комплексного расслоения ζ, получаем $c_{2k+1}(\xi_{\mathbb C}) = c_{2k+1}(\overline{\xi}_{\mathbb C}) = -c_{2k+1}(\xi_{\mathbb C})$, т. е. $2c_{2k+1}(\xi_{\mathbb C}) = 0$. Второе утверждение из б) следует из теоремы 5.6. $\square$

Теорема 5.10 (формула Уитни для классов Понтрягина)**.** *Для любых вещественных расслоений ξ и η имеем $2(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$.*

Доказательство. Это следует из формулы Уитни для классов Чженя и предложения 5.9 б). $\square$

Если ζ — n-мерное комплексное расслоение, то, пользуясь принципом расщепления (7), мы можем записать $c(\zeta) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$. Тогда имеем $c(\overline{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i)$, $c((\zeta_{\mathbb R})_{\mathbb C}) = c(\zeta \oplus \overline{\zeta}) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i^2)$ и

$$p(\zeta_{\mathbb R}) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i^2),$$

т. е. $p_i(\zeta_{\mathbb R}) = \sigma_i(t_1^2, \ldots, t_n^2)$.

Пример 5.11. Вычислим классы Понтрягина (овеществления касательного расслоения) $\mathbb CP^n$. Мы имеем $\mathcal T\mathbb CP^n \oplus \underline{\mathbb C} \cong \overline{\gamma}^{\oplus(n+1)}$, откуда $c(\mathbb CP^n) = (1 + t)^{n+1}$, где $t = c_1(\overline{\gamma}) \in H^2(\mathbb CP^n)$ — образующая. Следовательно,

$$p(\mathbb CP^n) = (1 + t^2)^{n+1}, \quad p_k(\mathbb CP^n) = C_{n+1}^k t^{2k} \text{ при } k \leqslant \frac{n}{2}.$$

Так как любое вещественное n-мерное расслоение ξ над клеточной базой B классифицируется отображением $f\colon B \to BO(n)$, можно рассмотреть *универсальные классы Понтрягина* $p_k = p_k(\gamma^n)$, где γ^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb R^\infty)$. Тогда мы имеем $p_k(\xi) = f^* p_k$.

Целочисленное кольцо когомологий $H^*(BO(n))$ не порождается классами p_k и устроено достаточно сложно. Как мы увидим, кольцо когомологий $BO(n)$ порождается универсальным классами Понтрягина, если в кольце коэффициентов обратить 2. Далее в этом разделе все когомологии будут рассматриваться с коэффициентами в коммутативном кольце $R \ni \frac{1}{2}$. Например, $R = \mathbb Z[\frac{1}{2}]$ или $R = \mathbb Q$.

Предложение 5.12. *Пусть $R \ni \frac{1}{2}$. Кольцо $H^*(BO(n); R)$ содержит подкольцо многочленов $R[p_1, \ldots, p_{[\frac{n}{2}]}]$.*

Доказательство. Пусть вначале $n = 2k$. Рассмотрим отображение $f\colon BU(k) \to BO(2k)$, классифицирующее овеществление тавтологического k-мерного комплексного рассслоения над $BU(k)$, которое в течение этого доказательства мы будем обозначать γ'. Через γ будем обозначать тавтологическое $2k$-мерное вещественное расслоение над $BO(2k)$. Мы имеем $f^*\gamma = \gamma'_{\mathbb R}$, $p_i = p_i(\gamma)$, $i = 1, \ldots, k$. Мы имеем

$$1 - p_1(\gamma) + p_2(\gamma) - \ldots + (-1)^k p_k(\gamma) = 1 + c_2(\gamma_{\mathbb C}) + c_4(\gamma_{\mathbb C}) + \ldots + c_{2k}(\gamma_{\mathbb C}),$$

$$f^*(1-p_1+p_2-\ldots+(-1)^kp_k)=1+c_2(f^*\gamma_{\mathbb C})+c_4(f^*\gamma_{\mathbb C})+\ldots+c_{2k}(f^*\gamma_{\mathbb C})=$$
$$=1+c_2((\gamma'_{\mathbb R})_{\mathbb C})+\ldots+c_{2k}((\gamma'_{\mathbb R})_{\mathbb C})=1+c_2(\gamma'\oplus\overline{\gamma}')+c_4(\gamma'\oplus\overline{\gamma}')+\ldots+c_{2k}(\gamma'\oplus\overline{\gamma}')=$$
$$=(1+c_1+c_2+\ldots+c_k)(1-c_1+c_2-\ldots+(-1)^kc_k),$$

где $c_i=c_i(\gamma')\in H^*(BU(k);R)$ — универсальные классы Чженя. Следовательно,

$$f^*p_i=2c_{2i}-2c_{2i-1}c_1+2c_{2i-2}c_2-\ldots+(-1)^{i-1}2c_{i+1}c_{i-1}+(-1)^ic_i^2.$$

Отсюда вытекает, что классы $f^*p_1,\ldots,f^*p_k$ алгебраически независимы в кольце $H^*(BU(k);R)=R[c_1,\ldots,c_k]$ (т. е. никакой многочлен от них не равен нулю). Следовательно, то же верно и для классов $p_1,\ldots,p_k$ в $H^*(BO(2k);R)$, т. е. $H^*(BO(2k);R)$ содержит подкольцо $R[p_1,\ldots,p_k]$.

Пусть теперь $n=2k+1$. Рассмотрим отображение $g\colon BO(2k)\to BO(2k+1)$, классифицирующее $(2k+1)$-мерное расслоение $\gamma^{2k}\oplus\underline{\mathbb R}$. Тогда $g^*p_i=g^*p_i(\gamma^{2k+1})=p_i(\gamma^{2k})=p_i$ при $i=1,\ldots,k$. Так как классы $p_1,\ldots,p_k$ алгебраически независимы в $H^*(BO(2k);R)$, они также алгебраически независимы в $H^*(BO(2k+1);R)$. □

5.5. **Классы Понтрягина ориентированных расслоений.**

Предложение 5.13. *Для ориентированного $2k$-мерного вещественного расслоения ξ имеем $p_k(\xi)=e(\xi)^2$.*

Доказательство. Имеем изоморфизм $(\xi_{\mathbb C})_{\mathbb R}\cong\xi\oplus\xi$ (неориентированных) вещественных расслоений. В левой части этого равенства ориентация задаётся базисом $(e_1,0),(0,e_1),\ldots,(e_{2k},0),(0,e_{2k})$, а в правой части — базисом $(e_1,0),\ldots,(e_{2k},0)$, $(0,e_1),\ldots,(0,e_{2k})$. Поэтому для ориентируемых расслоений получаем изоморфизм $(\xi_{\mathbb C})_{\mathbb R}\cong(-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}}\xi\oplus\xi\cong(-1)^k\xi\oplus\xi$. Отсюда

$$p_k(\xi)=(-1)^kc_{2k}(\xi_{\mathbb C})=(-1)^ke((\xi_{\mathbb C})_{\mathbb R})=e(\xi\oplus\xi)=e(\xi)^2.$$ □

Напомним, что через $S\xi$ обозначается пространство сферического расслоения $S\xi\to B$ со слоем S^{n-1}.

Теорема 5.14 (точная последовательность Гизина)**.** *Пусть $\xi=(p\colon E\to B)$ — ориентированное n-мерное векторное расслоение и $p\colon S\xi\to B$ — соответствующее расслоение сфер. Имеет место точная последовательность*

$$\ldots\to H^i(B)\xrightarrow{\cdot e(\xi)}H^{i+n}(B)\xrightarrow{p^*}H^{i+n}(S\xi)\to H^{i+1}(B)\xrightarrow{\cdot e(\xi)}\ldots$$

Доказательство. Рассматривая точную последовательность пары $(E,E\setminus B)$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^j(E,E\setminus B) \arrow[r] & H^j(E) \arrow[r] & H^j(E\setminus B) \arrow[r] & H^{j+1}(E,E\setminus B) \arrow[r] & {} \\
\arrow[r] & H^{j-n}(B) \arrow[r, "\cdot e(\xi)"] \arrow[u, "\cong"', "\cdot\theta(\xi)"] & H^j(B) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & H^j(S\xi) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & H^{j+1-n}(B) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "\cdot\theta(\xi)"] & {}
\end{tikzcd}$$

где левая стрелка — изоморфизм Тома, а два другие вертикальные изоморфизма индуцированы гомотопическими эквивалентностями. Нижняя строка — требуемая точная последовательность. □

Множество всех ориентированных k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^N$ называется *ориентированным многообразием Грассмана* и обозначается $\widetilde{G}_k(\mathbb{R}^N)$. Имеется двулистное накрытие $\widetilde{G}_k(\mathbb{R}^N) \to G_k(\mathbb{R}^N)$, задаваемое забыванием ориентации подпространств. Также определён бесконечномерный ориентированный грассманиан $\widetilde{G}_k = \widetilde{G}_k(\mathbb{R}^\infty)$ и тавтологическое ориентированное k-мерное расслоение $\widetilde{\gamma}^k$ над $\widetilde{G}_k$. Для ориентированных расслоений имеет место аналог теоремы 2.15: ориентированное расслоение ξ классифицируется отображением базы $\widetilde{f}\colon B \to \widetilde{G}_k$, т. е. $\xi \cong \widetilde{f}^*\widetilde{\gamma}^k$, и гомотопные отображения $\widetilde{f}$ индуцируют изоморфные ориентированные расслоения. В связи с этим пространство $\widetilde{G}_k$ называется *классифицирующим пространством* ориентированных k-мерных расслоений и обозначается $BSO(k)$.

Имеем двулистное накрытие $BSO(n) \to BO(n)$. Таким образом, ориентация вещественного n-мерного расслоения ξ над B — это в точности класс гомотопии поднятия классифицирующего отображения $f\colon B \to BO(n)$ до отображения $\widetilde{f}\colon B \to BSO(n)$:

$$\begin{tikzcd} & BSO(n) \arrow[d] \\ B \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & BO(n) \end{tikzcd}$$

Теорема 5.15. *Пусть R — коммутативное кольцо, содержащее $\frac{1}{2}$. Тогда*

$$H^*(BSO(n); R) \cong \begin{cases} R[p_1, \dots, p_k], & \text{если } n = 2k+1, \\ R[p_1, \dots, p_{k-1}, e], & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

где $p_i = p_i(\widetilde{\gamma}^n)$ и $e = e(\widetilde{\gamma}^n)$ — универсальные характеристические классы и $p_k = e^2$ при $n = 2k$.

Доказательство. В доказательстве все когомологии рассматриваются с коэффициентами в R. Аналогично предложению 5.12 доказывается, что кольцо $H^*(BSO(n))$ содержит подкольцо $R[p_1, \dots, p_k]$ или $R[p_1, \dots, p_{k-1}, e]$ в зависимости от чётности n. Далее используем индукцию по n. При $n = 1$ имеем двулистное накрытие $BSO(1) = S^\infty \to \mathbb{R}P^\infty = BO(1)$. Поэтому $H^*(BSO(1)) \cong R$. При $n = 2$ имеем $BSO(2) = BU(1)$, так как ориентация двумерного подпространства эквивалентна заданию в нём комплексной структуры. Поэтому $H^*(BSO(2)) \cong H^*(BU(1)) \cong R[c_1] = R[e]$.

Чтобы применить шаг индукции, рассмотрим универсальное ориентированное расслоение $E\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$. Пространство расслоения сфер $S\widetilde{\gamma}^n$ представляет собой множество векторов v длины 1 в ориентированных n-мерных подпространствах в $\mathbb{R}^\infty$. Рассмотрим отображение $S\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n-1)$, сопоставляющее вектору v его ортогональную ориентированную $(n-1)$-мерную плоскость $v^\perp$. Тогда $S\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n-1)$ — локально тривиальное расслоение со стягиваемым слоем S^∞, и поэтому $S\widetilde{\gamma}^n \simeq BSO(n-1)$. Индуцированный проекцией $S\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$ гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \to H^*(S\widetilde{\gamma}^n)$ превращается в гомоморфизм $H^*(BSO(n)) \to H^*(BSO(n-1))$, индуцированный отображением $BSO(n-1) \to BSO(n)$, классифицирущим расслоение $\widetilde{\gamma}^{n-1} \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Поэтому этот гомоморфизм переводит классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n))$ в соответствующие классы $p_i \in H^{4i}(BSO(n-1))$ для $1 \leqslant i < \frac{n}{2}$.

Пусть $n = 2k$. Рассмотрим последовательность Гизина расслоения $E\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$:

$$\ldots \to H^{2i+2k-1}(S\widetilde{\gamma}^n) \to H^{2i}(BSO(2k)) \xrightarrow{\cdot e} H^{2i+2k}(BSO(2k)) \to H^{2i+2k}(S\widetilde{\gamma}^n) \to \\ \to H^{2i+1}(BSO(2k)) \to \ldots$$

Здесь $H^{2i+2k-1}(S\widetilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k-1}(BSO(2k-1)) = 0$ по предположению индукции. Гомоморфизм $H^{2i+2k}(BSO(2k)) \to H^{2i+2k}(S\widetilde{\gamma}^n) = H^{2i+2k}(BSO(2k-1))$ сюръективен, так как $H^*(BSO(2k-1)) = R[p_1, \ldots, p_{k-1}]$ по предположению индукции и $p_i \in H^*(BSO(2k-1))$ накрывается соответствующим $p_i \in H^*(BSO(2k))$. В итоге получаем короткую точную последовательность в верхней строке диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{2i}(BSO(2k)) \arrow[r, "\cdot e"] & H^{2i+2k}(BSO(2k)) \arrow[r, "\varphi"] & H^{2i+2k}(BSO(2k-1)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]^{2i} \arrow[r, "\cdot e"] \arrow[u, hook] & R[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]^{2i+2k} \arrow[r] \arrow[u, hook] & R[p_1, \ldots, p_{k-1}]^{2i+2k} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

Чтобы завершить шаг индукции, докажем, что средняя вертикальная стрелка — эпиморфизм. Применив вспомогательную индукцию по размерности группы когомологий, можно считать, что левая вертикальная стрелка сюръективна. Пусть $a \in H^{2i+2k}(BSO(2k))$. Запишем $\varphi(a) = Q(p_1, \ldots, p_{k-1})$, где Q — многочлен. Тогда $\varphi(a - Q(p_1, \ldots, p_{k-1})) = 0$, следовательно, $a - Q(p_1, \ldots, p_{k-1}) = R(p_1, \ldots, p_{k-1}, e) \cdot e$, где R — многочлен. Итак, $a = Q(p_1, \ldots, p_{k-1}) + R(p_1, \ldots, p_{k-1}, e) \cdot e \in R[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]$ и средняя стрелка сюръективна.

Пусть теперь $n = 2k+1$. Тогда $e(\widetilde{\gamma}^n) = 0$, так как n нечётно и $R \ni \frac{1}{2}$. Поэтому гомоморфизм умножения на e в точной последовательности Гизина расслоения $E\widetilde{\gamma}^n \to BSO(n)$ нулевой, и она распадается в короткие точные последовательности:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{2i}(BSO(2k+1)) \arrow[r] & H^{2i}(BSO(2k)) \arrow[r, "\varphi"] & H^{2i-2k}(BSO(2k+1)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R[p_1, \ldots, p_k]^{2i} \arrow[r, "\psi"] \arrow[u, hook] & R[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]^{2i} \arrow[r] \arrow[u, equal] & R[p_1, \ldots, p_k]^{2i-2k} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Равенство посередине — по предположению индукции. Имеем $\psi(p_i) = p_i$ при $i < k$ и $\psi(p_k) = e^2$, здесь $e = e(\widetilde{\gamma}^{2k})$. Тогда $R[p_1, \ldots, p_{k-1}, e]$ — свободный $R[p_1, \ldots, p_k]$-модуль с образующими 1 и e, и из сравнения рангов получаем $H^{2i}(BSO(2k+1)) = R[p_1, \ldots, p_k]^{2i}$. □

Следствие 5.16. *Любой характеристический класс ориентированных n-мерных расслоений с коэффициентами в $R \ni \frac{1}{2}$ есть многочлен от классов Понтрягина и, если n чётно, от класса Эйлера.*

Задачи и упражнения.

5.17. Пусть V — комплексное векторное пространство. Докажите, что формула $j(x, y) = (-y, x)$ задаёт на $V \oplus \overline{V}$ естественную структуру кватернионного пространства (называемого кватернионизацией V).

5.18. Вычислите классы Понтрягина касательного расслоения кватернионного проективного пространства $\mathbb{H}P^n$. [*Указание:* пример 5.7.]

5.19. Докажите, что $p_i(\xi) = w_{2i}^2(\xi) \mod 2$ для вещественного расслоения ξ.

5.20. Докажите изоморфизм

$$H^*(BSO(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n],$$

где $w_i = w_i(\widetilde{\gamma}^n)$. Докажите, что при гомоморфизме

$$H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n] \to \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_n] = H^*(BSO(n);\mathbb{Z}_2),$$

индуцированном накрытием $BSO(n) \to BO(n)$, класс w_1 переходит в нуль, и w_i переходит в w_i при $i \geqslant 2$. [*Указание:* используйте аналог точной последовательности Гизина с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ для двулистного накрытия — расслоения сфер одномерного вещественного расслоения.]

5.21. Докажите, что если $R \ni \frac{1}{2}$, то имеет место изоморфизм

$$H^*(BO(n);R) \cong R[p_1, \dots, p_{[\frac{n}{2}]}].$$

Опишите гомоморфизм $H^*(BO(n);R) \to H^*(BSO(n);R)$, индуцированный накрытием $BSO(n) \to BO(n)$.