

Листок 5, 13 октября 2025 г.

Задача 1. Любой стягиваемый комплекс есть прямая сумма сдвигов комплексов вида $0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0$.

Задача 2. (5-лемма). Дан морфизм между точными комплексами

$$\begin{array}{ccccccccc} K^1 & \longrightarrow & K^2 & \longrightarrow & K^3 & \longrightarrow & K^4 & \longrightarrow & K^5 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ L^1 & \longrightarrow & L^2 & \longrightarrow & L^3 & \longrightarrow & L^4 & \longrightarrow & L^5 \end{array}$$

причём среди f_i все, кроме f_3 , – изоморфизмы. Покажите, что f_3 – тоже изоморфизм.

Задача 3. Сдвиг комплекса $(K^\bullet, d^\bullet)$ – это комплекс $(K[1]^\bullet, d[1]^\bullet)$, где $K[1]^i = K^{i+1}$, $d[1]^i = -d^{i+1}$. Пусть дан морфизм комплексов $f^\bullet: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$. Определим комплекс $C(f)^\bullet$, называемый конусом $f^\bullet$: положим $C^i = K^{i+1} \oplus L^i$ и

$$d_C(k^{i+1}, l^i) = (-d(k^{i+1}), f(k^{i+1}) + d(l^i)).$$

Проверьте, что $C(f)$ – комплекс. Определите естественные морфизмы $a^\bullet: L^\bullet \rightarrow C(f)^\bullet$ и $b^\bullet: C(f)^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$, покажите, что они образуют точную тройку

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \rightarrow 0.$$

Докажите, что связывающие гомоморфизмы $H(K) \rightarrow H(L)$ для указанной точной тройки совпадают с гомоморфизмами, индуцированными f .

Задача 4. Проверьте, что в последовательности

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \xrightarrow{f[1]} L[1]$$

композиции af и $f[1]b$ гомотопны нулю.

Задача 5. Проверьте, что морфизм комплексов –

а) квазиизоморфизм $\Leftrightarrow$ его конус ацикличен;

б*) гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow$ его конус стягиваем.

Задача 6. Пусть A – коммутативное кольцо, а B – алгебра над A . Положим $K_i = 0$ при $i < -1$,

$$K_i = \underbrace{B \otimes_A B \otimes_A \dots \otimes_A B}_{i+2 \text{ раз}}$$

иначе. Дифференциал определим по формуле

$$d_k(b_0 \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{k+1}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i b_0 \otimes \dots \otimes b_i b_{i+1} \otimes \dots \otimes b_{k+1}.$$

а) Докажите, что получится комплекс. Он называется Ваг-резольвентой.

б) Найдите его гомологии: покажите, что отображения $h_i: K_i \rightarrow K_{i+1}$

$$h_i(b_0 \otimes \dots \otimes b_{i+1}) = 1 \otimes b_0 \otimes \dots \otimes b_{i+1}$$

задают гомотопию тождественного морфизма Вар-резольвенты нулю.

Задача 7. Определим комплекс модулей $K(x_1, \dots, x_n)_\bullet$ над алгеброй $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Пусть $M = A^{\oplus n} = \bigoplus_1^n Ae_i$, положим $K_i = \Lambda^i(M)$ и

$$d_k(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \sum_{r=1}^k (-1)^r x_{i_r} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{r-1}} \wedge e_{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

Проверьте, что получится комплекс. Он называется комплексом Кошуля. Двойственным комплексом к комплексу $(K_\bullet, d_\bullet)$ называется комплекс $(K^{*\bullet}, d^{*\bullet})$, для которого $K^{*i} = \text{Hom}_A(K_i, A)$, а $d^{*i} = (d_{i+1})^*$.

Задача 8. Вычислите двойственный комплекс к комплексу Кошуля. Покажем, что в комплексе Кошуля $H_0 = k$, $H_i = 0$ при $i > 0$.

Задача 9. а) Покажите, что в $K(x_1, \dots, x_n)$ имеется подкомплекс $K(x_2, \dots, x_n) \otimes_k k[x_1]$, состоящий из членов, не содержащих e_1 , а фактор по этому подкомплексу изоморфен $e_1 \wedge K(x_2, \dots, x_n) \otimes_k k[x_1]$.

б) Покажите, что $K(x_1, \dots, x_n)$ есть конус морфизма умножения на x_1 :

$$K(x_2, \dots, x_n) \otimes_k k[x_1] \xrightarrow{x_1} K(x_2, \dots, x_n) \otimes_k k[x_1].$$

с) Вычислите когомологии $K(x_1, \dots, x_n)$.

Задача 10. Пусть K^* и L^* – комплексы. Определим комплекс морфизмов следующим образом. Положим

$$\text{Hom}(K, L)^i = \prod_n \text{Hom}(K^n, L^{n+i}),$$

а дифференциал d^i переводит семейство $(f^n) \in \text{Hom}(K, L)^i$ в семейство $(g^n) \in \text{Hom}(K, L)^{i+1}$,

$$g^n = df^n - (-1)^i f^{n+1} d.$$

а) Проверьте, что это действительно дифференциал.

б) Что такое циклы, границы и когомологии в комплексе морфизмов?

Задача 11. Вычислите

а) $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(M, N)$, где M, N – конечные либо бесконечные циклические группы.

с) $\text{Ext}_{\mathbb{C}[t]}^i(M, N)$, где M, N – модули вида $\mathbb{C}[t]$ либо $\mathbb{C}[t]/(t-a)^n$.

Задача 12. Покажите, что $\text{Ext}_A^i(M, N) = 0$ при $i > 0$, если N – инъективный A -модуль. Покажите, что $\text{Tor}_A^i(M, N) = 0$ при $i > 0$, если N – проективный A -модуль.

Задача 13. Вычислите

а) $\text{Ext}_A^i(k, A)$ и $\text{Ext}_A^i(k, k)$, где $A = k[x_1, \dots, x_n]$.

с) $\text{Ext}_A^i(k, A)$ и $\text{Ext}_A^i(k, k)$, где $A = k[x]/(x^2)$.