

Группы - 1.

Задача 1. а) Пусть $K \subset H$ подгруппа и $H \subset G$ подгруппа конечной группы G . Докажите, что $|G : K| = |G : H| |H : K|$.

б) Пусть H, K – подгруппы конечной группы G и числа $|G : H|$ и $|G : K|$ – взаимнопросты. Докажите, что $G = HK$.

Задача 2. Докажите, что в конечной группе нечётного порядка у любого элемента существует единственный квадратный корень.

Задача 3. Пусть H_1, H_2 подгруппы группы G . Докажите, что $H_1 H_2$ – подгруппа G тогда и только тогда когда $H_1 H_2 = H_2 H_1$. Приведите пример группы и двух подгрупп, произведение которых не является подгруппой.

Задача 4. а) Докажите, что любой элемент $\sigma \in S_n$ представляется в виде произведения непересекающихся циклов единственным образом.

б) Что происходит с циклом при сопряжении элементом $\sigma \in S_n$? Опишите классы сопряжённости в S_n и найдите их порядки.

Задача 5. а) Верно ли, что нормальная подгруппа нормальной подгруппы нормальна в объемлющей группе?

б) Подгруппа называется характеристической, если она инварианта относительно всех автоморфизмов группы. Покажите что, если H характеристическая подгруппа в N , а N – нормальна в G , то H нормальна в G . Верно ли это утверждение, если поменять слова “характеристическая” и “нормальная” местами?

в) Пусть G – конечная группа и p – минимальный простой делитель $|G|$. Пусть $|G : H| = p$. Докажите, что H – нормальная подгруппа G .

г) Пусть в некоторой группе все подгруппы – нормальны. Верно ли, что группа – абелева?

Задача 6. а) Пусть G – конечная группа и p – простое. Тогда $|G| = p^k$ для некоторого k тогда и только тогда когда порядки всех элементов G – это степени p .

б) Если все элементы G (кроме e) имеют одинаковый порядок, то этот порядок равен p , а $|G| = p^k$.

в) Используя предыдущий пункт докажите, что порядок конечного поля равен степени простого числа.

Задача 7. а) Пусть H – любая, а N – нормальная подгруппы некой группы. Покажите, что $H \cap N \trianglelefteq H$, $HN = NH$ – подгруппа, $N \trianglelefteq HN$ и $HN/N \simeq N/(H \cap N)$.

б) Пусть G – группа, $K \subset G$ – нормальная подгруппа, и N подгруппа K , нормальная в G . Тогда $K/N \trianglelefteq G/N$ и $(G/N)/(K/N) \simeq G/K$.

Задача 8. а) Докажите, что $PGL_n(\mathbb{C}) \simeq PSL_n(\mathbb{C})$.

б) Докажите, что $PGL_n(\mathbb{k}) \simeq PSL_n(\mathbb{k})$ тогда и только тогда, когда у каждого элемента \mathbb{k} существует корень n -ой степени из 1 в \mathbb{k} . Докажите, что $PGL_n(\mathbb{R}) \simeq PSL_n(\mathbb{R}) \simeq SL_n(\mathbb{R})$ для нечётного n .

в) Докажите, что $PSL_n(\mathbb{R})$ подгруппа индекса 2 в $PGL_n(\mathbb{R})$ для чётного n .

Задача 9. а) Докажите, что $Aut(Q_8) = S_4$.

б) Докажите, что если $f \in Aut(S_n)$ и f переводит транспозиции в транспозиции, то f – внутренний автоморфизм. Выведите отсюда, что $Aut(S_n) = S_n$, $n \neq 2, 6$.

в) Верно ли, что $Aut(G_1 \times G_2) \simeq Aut(G_1) \times Aut(G_2)$? Пусть G_1, G_2 – конечные группы взаимнопростых порядков. Докажите, что $Aut(G_1 \times G_2) \simeq Aut(G_1) \times Aut(G_2)$.

Задача 10*. Проективной прямой \mathbb{P}^1 над полем \mathbb{k} будем называть множество прямых в двумерном пространстве \mathbb{k}^2 . Биективное отображение $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ будем называть проективным преобразованием, если оно индуцировано линейным преобразованием \mathbb{k}^2 .

а) Докажите, что проективные преобразования образуют группу изоморфную $PGL_2(\mathbb{k})$.

б) Отождествите $\mathbb{k}P^1$ с множеством $\mathbb{k} \cup \{\infty\}$. Докажите, что при этом отождествлении группа проективных преобразований отождествляется с дробно-линейными биективными отображениями $\mathbb{k} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{k} \cup \{\infty\}$, $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{k}, ad - bc \neq 0$

в) Пусть p – простое число. Структурой проективной прямой на множестве $\{0, 1, \dots, p-1, \infty\}$ будем называть биекцию $\mathbb{k}P^1 \rightarrow \{0, 1, \dots, p-1, \infty\}$. Будем говорить, что структуры f, g эквивалентны, если $f \circ g^{-1}$ – проективное преобразование. Докажите, что число классов эквивалентности равно $p+1$.

г) Пусть $f : S_6 \rightarrow S_6$ – отображение, переводящее перестановку $\{0, \dots, 4, \infty\}$ в перестановку шести структур проективной прямой на этом множестве (структуры как-то занумерованны). Найдите $f((01)(23)(4\infty))$.

д) Докажите, что f – внешний автоморфизм группы S_6 .

е) Докажите, что $Aut(S_6) \simeq S_6 \rtimes \mathbb{Z}_2$.