НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.
Экзамен. 19.12.2025.

Экзамен будет домашним. Отсканированное решение (не забудьте написать свою фамилию!) надо <u>*не позднее*</u> *26 декабря прислать мне на электронную почту в виде одного pdf файла.*

Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами, кроме, может быть, одного, не менее 3 задач.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Пусть $f : \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ сопоставляет каждой ортогональной матрице её первый столбец. Доказать, что f гладкое отображение, и что у него все точки регулярны. Найти прообраз $f^{-1}(y)$. (10 баллов).

Задача 2. Пусть $[z_0 : \ldots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{RP}^n$. *Отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^5$, заданное формулой $\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2]$. Доказать, что отображение Веронезе — гладкое отображение. Описать образ отображения Веронезе. (5 баллов).

Задача 3. Пусть M — связное многообразие. Докажите, что для любых двух точек $x, y \in M$ существует автоморфизм M (то есть диффеоморфизм M на себя), переводящий x в y. (10 баллов).

Задача 4. Доказать, что подмножество $\{A \mid \det(A + I) = 0\}$ группы $\mathrm{SO}(3)$ с естественной гладкой структурой диффеоморфно $\mathbb{R}P^2$. (15 баллов).

Задача 5. Интегрируемо ли распределение, порожденное векторными полями

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

в $\mathbb{R}^3$? Если да, найдите его интегральные подмногообразия. (15 баллов).

Задача 6. Найти когомологии двумерной сферы с μ вклеенными листами Мебиуса. (10 баллов).

Задача 7. Найти кольцо когомологий $\mathbb{CP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{CP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях). (10 баллов)

Задача 8. Пусть N подмногообразие риманова многообразия M, причем $\dim N = \dim M - 1$, такие подмногообразия называются иногда гиперповерхностями или подмногообразиями коразмерности 1. Будем называть такую гиперповерхность N двусторонней, если на N существует глобальное единичное поле нормалей, и односторонней в противном случае. Докажите, что если M ориентируемо, то двусторонность N равносильна ориентируемости N. Докажите, что $\mathbb{RP}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1$ неориентируемая двусторонняя гиперповерхность. Постройте пример ориентируемой односторонней поверхности. (15 баллов).

Задача 9*. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ гладкая функция на $M^n \times \mathbb{R}$, а λ_0 такое число, что

$$\varphi(x, \lambda_0) = 0 \Longrightarrow d_x\varphi \neq 0.$$

Доказать, что $M_\lambda = \{x | \varphi(x, \lambda) \leqslant 0\}$ является многообразием с краем при λ достаточно близком к λ_0, и

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{M_\lambda} \omega = \int_{\partial M_\lambda} \tilde{\omega}.$$

Найти $\tilde{\omega}$. (25 баллов).