ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 4: ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение ранга k над B. Проверьте, что его проективизация $\mathbb{R}P(\xi)$ — локально тривиальное расслоение над B со слоем $\mathbb{R}P^{k-1}$, а соответствующее тавтологическое расслоение $\gamma(\xi)$ — одномерное векторное расслоение над $\mathbb{R}P(\xi)$.

2. Пусть $\gamma^1_{n,\mathbb{R}}$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$.
а) Докажите, что пространство расслоения $\gamma^1_{1,\mathbb{R}}$ гомеоморфно открытой ленте Мёбиуса (проективной плоскости с выколотой точкой).
б) Задайте явно отображения перехода $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$ расслоения $\gamma^1_{n,\mathbb{R}}$ для покрытия $\mathbb{R}P^n$ стандартными аффинными картами.
в) Докажите, что векторное расслоение $\gamma^1_{1,\mathbb{R}} \oplus \gamma^1_{1,\mathbb{R}}$ тривиально.
г) При каких n векторное расслоение $\gamma^1_{n,\mathbb{R}}$ тривиально?

3. При помощи эрмитовой метрики установите канонический изоморфизм $\xi^* \cong \overline{\xi}$ между двойственным комплексным расслоением $\xi^* := \mathrm{Hom}(\xi, \underline{\mathbb{C}})$ и комплексно сопряжённым расслоением $\overline{\xi}$.

4. Докажите, что классы изоморфизма одномерных векторных расслоений над B образуют абелеву группу относительно операции тензорного произведения.

5. Докажите:
а) Если ξ — вещественное векторное расслоение, то $\overline{\xi_\mathbb{C}} \cong \xi_\mathbb{C}$ и $(\xi_\mathbb{C})_\mathbb{R} \cong \xi \oplus \xi$;
б) Если η — комплексное векторное расслоение, то $(\eta_\mathbb{R})_\mathbb{C} \cong \eta \oplus \overline{\eta}$.

6. Постройте изоморфизм комплексных расслоений $\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

7. Постройте изоморфизм векторных расслоений $\mathcal{T}G_k(\mathbb{R}^N) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$, где $\gamma = \gamma^k_{N,\mathbb{R}}$ — тавтологическое расслоение над грассманианом $G_k(\mathbb{R}^N)$ k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^N$, а $\gamma^\perp$ — его ортогональное дополнение.

8. Пусть пространство B компактно и хаусдорфово, а $E \to B \times [0,1]$ — векторное расслоение. Докажите, что его ограничения на $B \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$ изоморфны. (На самом деле это верно, если B паракомпактно и хаусдорфово.)

9. а) Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{R}^n$. Пусть в слое над каждой точкой задана структура векторного пространства так, что отображения сложения векторов $s : E \times_B E \to E$ и умножения на скаляр $m : \mathbb{R} \times E \to E$ непрерывны. Докажите, что мы получили векторное расслоение.
б) Наоборот, пусть $E \to B$ — векторное расслоение. Докажите, что отображения s и m корректно определены и непрерывны.

10. Пусть $\mathcal{V}(B)$ — категория векторных расслоений и морфизмов над компактным хаусдорфовым пространством B. Докажите, что
а) Пространство сечений $\Gamma(\xi)$ векторного расслоения ξ является конечно порождённым проективным[1] модулем над кольцом непрерывных функций $C(B;\mathbb{R})$;
б) Категория $\mathcal{V}(B)$ эквивалентна категории конечно порождённых проективных $C(B;\mathbb{R})$-модулей; при этом тривиальные расслоения соответствуют свободным модулям. (Это утверждение известно как *теорема Свана*.)

[1]Модуль M *проективный*, если он является прямым слагаемым свободного модуля.